159

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Dans cette leçon E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

I) Espace dual

Définition 1 : Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires de E est appelé espace dual de E et noté E^*.

Exemple 2.
- Si $x \in \mathbb{K}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors $f_i : x \mapsto x_i$ est une forme linéaire de $\mathbb{K}^n$
- Si $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $A \in \mathcal{A}$ alors $\phi : f \mapsto \int_A f \, d\mu$ est une forme linéaire si $\mu(A) < +\infty$
- $X \mapsto \mathrm{Tr}(X)$ est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 3 : Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on définie $e_i^* \in E^*$ comme $e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exemple 4 : Dans $\mathbb{K}^n$, les e_i^* sont les fonctions coordonnées pour la base canonique.

Proposition 5. Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de B

De plus si $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$.

Corollaire 6 : $\dim E = \dim E^*$

Remarque 7 : Cela forme un isomorphisme non-canonique de E dans E^*.

Remarque 8 : En dimension infinie, les $(e_i^*)_{i}$ sont libres mais pas nécessairement générateurs.

Définition 9 : On note E^{**} le dual de E^*. On l'appelle l'espace bidual de E.

Proposition 10 : Si $x \in E$ alors $\tilde{x} : \begin{array}{l} E^* \to \mathbb{K} \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array} \in E^{**}$.

De plus $x \mapsto \tilde{x}$ est un isomorphisme canonique de E dans E^{**}.

Remarque 11 : Pour cette raison, on identifie souvent E et E^{**}.

Proposition 12. Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E^* alors il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E appelée base antéduale de $(f_1, \dots, f_n)$ tel que $e_i^* = f_i$ $\forall i \in [\![1;n]\!]$.

II) Notion d'orthogonalité

1) Généralités

Définition 13 :
- $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont orthogonaux si $\varphi(x) = 0$.
- Si $A \subset E$, $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A,\ \varphi(x) = 0\}$
- Si $\theta \subset E^*$, $\theta^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in \theta,\ \varphi(x) = 0\}$

$A^\perp$ est l'orthogonal de A et θ° est l'orthogonal de θ.

Remarque 14 : On note souvent $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$ où $\langle , \rangle$ est un crochet de dualité. Cette notation fait référence à la notation du produit scalaire. Cette notation est justifiée par la définition précédente.

Proposition 15 :
- Si $A_1 \subset A_2 \subset E$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$
- Si $\theta_1 \subset \theta_2 \subset E^*$, alors $\theta_2^\circ \subset \theta_1^\circ$
- Si $A \subset E$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$
- Si $\theta \subset E^*$, $\theta^\circ = (\mathrm{Vect}\, \theta)^\circ$

Proposition 16 :
Si F est un sev de E alors
$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E \quad \text{et} \quad (F^\perp)^\circ = F$$

Si G est un sev de E^* alors
$$\dim G + \dim G^\circ = \dim E \quad \text{et} \quad (G^\circ)^\perp = G.$$

<u>proposition 17</u> :

1) Si A_1 et A_2 sont deux sev de E
   i) $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$
   ii) $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$
2) Si B_1 et B_2 sont deux sev de E^* alors
   i) $(B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$
   ii) $(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$

2) Hyperplan et équations de sous espaces vectoriels

<u>proposition 18</u>. Si $\varphi \in E^*$ alors $\operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan de E. Réciproquement, si H est un hyperplan de E alors $\exists \varphi \in E^*$ telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

<u>Exemple 19</u>. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $\operatorname{Ker} e_1^* = \operatorname{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ de dimension $\dim E - 1$.

<u>proposition 20</u> : Si H est un hyperplan, $H^\perp$ est une droite de E^*.
i.e. Si $\operatorname{Ker} \varphi_1 = \operatorname{Ker} \varphi_2$, $\exists \lambda \in K^* \mid \varphi_1 = \lambda \varphi_2$.

<u>proposition 21</u> : (Équation d'un sous espace vectoriel).

- Si $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$ telles que $rg(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$ alors
  $F = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}^\circ$ est un sev de E de dimension $n - r$
- Si F est un sev de E de dimension q alors il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q} \in E^*$ libres telle que $F = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, n-q]\!]\ \varphi_i(x) = 0\}$

<u>Remarque 22</u> : Pour trouver une équation de F, il suffit de trouver une base de $F^\perp$ dans E^*.

<u>Exemples 23</u> : Si $F = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_2 - e_4)$ dans $\mathbb{R}^4$
$$F = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_1 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

3) Lien avec les produits scalaires

Ici E est un espace euclidien muni d'un produit scalaire non dégénéré.

<u>Définition 24</u> : Si F est un sous espace vectoriel de E on définit $F^\perp = \{x \in E \mid \forall f \in F, \langle f, x \rangle = 0\}$ l'orthogonale de F au sens euclidien.
on a $F \oplus F^\perp = E$.

<u>Théorème de représentation de Riesz 25</u> :
Si $f \in E^*$ alors il existe un unique $y \in E$ tel que $\forall x \in E$, $f(x) = \langle y, x \rangle$

De plus $y \in \operatorname{Ker} f^\perp$.

<u>Remarque 26</u> : Cela permet d'obtenir un isomorphisme canonique de E dans E^*.

III) Application transposée

<u>Définition 27</u> : Si E et F sont deux K espaces vectoriels de dimension finie.
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit ${}^t u$ l'application transposée de u par
$$ {}^t u : \begin{array}{l} F^* \to E^* \\ f \mapsto f \circ u \end{array}$$

<u>proposition 28</u> : Si E et F sont de dimension finie.
i) $rg\, u = rg\, {}^t u$
ii) $\operatorname{Im} {}^t u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$
iii) $\operatorname{Ker} {}^t u = (\operatorname{Im} u)^\perp$

<u>proposition 29</u> : Si E, F, G sont des espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

<u>proposition 30</u> : Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases de E et F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors si $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} u$, on a ${}^t M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F^*, \mathcal{B}_E^*} {}^t u$.

Remarques 31 : Cela donne une définition différente de la transposée d'une matrice

Proposition 32 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, F est un sev de E alors F stable par f ssi $F^\perp$ est stable par ${}^t u$

Application 33. Trigonalisation d'endomorphisme. $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi P_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

IV) Applications de la dualité

1) Théorème de Hahn-Banach géométrique

Théorème 34 : (Hahn-Banach)

Soit E un espace vectoriel normé, F sous espace vectoriel de E et A ouvert convexe non vide tel que $F \cap A = \emptyset$. Alors il existe H un hyperplan fermé de E tel que $F \subset H$ et $H \cap A = \emptyset$.

Corollaire 35 : Soit E un $\mathbb{R}$-evn, F convexe compacte de E. Alors $x \in \mathrm{Conv}(F)$ ssi $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi(x) \leq \sup_{y \in F} \varphi(y)$.

DEV 1

Application 36 : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(0,1)$ pour la norme $\|\!|\cdot|\!\|_2$.

De plus $O_n(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}(0,1)$.

2) Construction des générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{K})$

Définition 37 : On appelle dilatation, tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que dans une certaine base sa matrice soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

λ est le rapport de u

Définition 38

On appelle transvection tout $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que dans une base adaptée sa matrice soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

DEV 2

Proposition 39.

u est une transvection ssi $\exists f \in (E)^*$ et $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $\forall x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.

Proposition 40 :

- Les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{K})$
- Les dilatations et transvections engendrent $GL_n(\mathbb{K})$

Applications 41 : Méthode du pivot de Gauss pour trouver l'inverse d'une matrice.

Références :

- × Gourdon, Algèbre (Analyse)
- × Perrin
- × FGN, Oraux X-ENS Algèbre 1
- × [illegible] 52 [illegible] - Algèbre L3