

LEÇON N° 262 : CONVERGENCES D'UNE SUITE DE VARIABLES ALÉATOIRES. THÉORÈMES LIMITES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Dans toute la suite on prend $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

I/ Modes de convergence.

A/ Convergence presque sûre. [WA]

Définition 1 : Convergence presque sûre.

Proposition 2 : Linéarité de la convergence presque sûre.

Lemme 3 : Lemmes de Borel-Cantelli.

Théorème 4 : CNS pour avoir convergence sûre d'une suite de variables aléatoires.

Corollaire 5 : Conditions suffisantes pratiques pour vérifier la convergence sûre.

B/ Convergence en probabilité. [WA] [OUV]

Définition 6 : Définition de la convergence en probabilité.

Exemple 7 : (X_n) suite tel que $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$ alors X_n converge en probabilité vers 0.

Proposition 8 : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \mathbb{E}[\min(X_n - X, 1)] \rightarrow 0$.

Proposition 9 : Si f continue et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$

Remarque 10 : On ne connaît pas nécessairement la variable aléatoire limite d'où le critère de Cauchy uniforme suivant.

Proposition 11 : Critère de Cauchy pour la convergence en probabilité.

Théorème 12 : Convergence presque sûre $\implies$ convergence en probabilité.

Contre-exemple 13 : La réciproque est fausse pour $X_n \sim \mathcal{B}(\frac{1}{n})$.

Proposition 14 : Réciproque partielle avec sous-suite.

C/ Convergence L^p . [OUV]

Définition 15 : Convergence L^p .

Proposition 16 : Implication des convergences L^p .

Proposition 17 : Critère de Cauchy L^p .

Théorème 18 : Convergence $L^p \implies$ convergence en probabilité.

Contre-exemple 19 : La réciproque est fausse : si X_n est de loi $\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{n}\delta_{n^2} + (1 - \frac{1}{n})\delta_0$ alors (X_n) converge en probabilité vers 0 mais ne converge pas L^1 vers 0.

D/ Équi-intégrabilité et réciproque partielle. [OUV]

Définition 20 : Équi-intégrabilité.

Proposition 21 : Exemple d'un cas uniformément majoré par un variable aléatoire intégrable

Théorème 22 : Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $\{|X_n|^p\}$ uniformément intégrable alors $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

E/ Convergence en loi. [WA]

Définition 23 : Définition convergence en loi.

Développement 1.a)

Théorème 24 : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall x$ point de continuité de F_X alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

Proposition 25 : Si f continue et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$

Proposition 26 : Convergence en probabilité $\implies$ convergence en loi.

Remarque 27 : La réciproque est fausse car a priori les variables aléatoires ne sont pas nécessairement définies sur le même espace probabilisé, la convergence en loi est une convergence de mesures.

Développement 1.b)

Proposition 28 : Si les variables sont discrètes alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k)$.

Application 29 : Approximation binomiale-poisson : si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ où $np_n \rightarrow \lambda$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

Remarque 30 : Annexe avec tous les modes de convergence leurs implications et leurs réciproques partielles.

Théorème 31 : Slutsky.

II/ Théorèmes limites. [WA]

Théorème 32 : Loi forte des grands nombres.

Application 33 : Méthode de Monte-Carlo pour calculer numériquement une intégrale.

Développement 2

Théorème 34 : Théorème de Paul-Lévy.

Théorème 35 : Théorème central limite.

Application 36 : Dans la méthode de Monte-Carlo, on a un intervalle de confiance de l'intégrale en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Références :

- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 383, p. 397, p. 411, p. 425, p. 438 et p. 533
- [OUV] Ouvrard Probabilités 2 p. 90, p. 93-98