

LEÇON N° 261 : LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE : CARACTÉRISATIONS, EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace euclidien.

I/ Loi d'une variable aléatoire.

A/ Premières définitions. [CR] [OUV]

Définition 1 : Variable aléatoire (réelle, discrète).

Définition 2 : Loi d'une variable aléatoire.

Notation 3 : $P_X(B) = P(X \in B)$, $P_X(\{k\}) = P(X = k)$.

Remarque 4 : Si X est discrète, $(P(X = k))_k$ caractérise la loi de X .

Définition 5 : On dit que X suit la loi de probabilité μ si μ est une mesure de probabilité et $P_X = \mu$.

Définition 6 : Variable à densité.

Théorème 7 : Radon-Nikodym.

Corollaire 8 : La densité caractérise la loi.

B/ Cas des vecteurs aléatoires, indépendance. [CR]

On prend ici $(X_1, \dots, X_n)$ n variables aléatoires définies chacune sur n espaces probabilisés a priori différents et on note $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Définition 9 : Loi conjointe et i -ième lois marginales.

Proposition 10 : Connaître la loi conjointe c'est connaître les lois marginales (Pour discret et à densité).

Contre-exemple 11 : La réciproque est fautive : considérer (X, Y) qui mesure le jet de deux dés.

Remarque 12 : Si X et Y à densité, (X, Y) n'est pas forcément à densité.

Définition 13 : Variables indépendantes.

Théorème 14 : $X_1, \dots, X_n$ indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$.

Proposition 15 : Si X et Y sont indépendantes alors $f_{(X,Y)} = f_X * f_Y$ et pareil pour le cas discret.

Application 16 : Si $X_1, \dots, X_n$ iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$, si X et Y indépendantes de loi respectives $\Gamma(r, \lambda)$ et $\Gamma(s, \lambda)$ alors $X + Y$ de loi $\Gamma(r + s, \lambda)$.

Définition 17 : Convergence en loi.

C/ Lois usuelles. [CR]

Tableau de toutes les lois et leurs interprétations.

II/ Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire.

A/ Fonction muette. [CR]

Définition 18 : Espérance.

Proposition 19 : Théorème de transfert.

Définition 20 : Moment d'ordre k .

Proposition 21 : Fonction muette : si pour toute f mesurable bornée $\mathbb{E}[f(X)] = \int f(x)g(x)dx$ alors X est à densité de densité g .

Remarque 22 : Permet le calcul de lois en pratique.

B/ Fonction de répartition. [CR] [WA]

Définition 23 : Fonction de répartition.

Proposition 24 : La fonction de répartition est croissante, continue à droite et calcul des limites aux extrémités.

Proposition 25 : La fonction de répartition caractérise la loi.

Proposition 26 : Pour une variable aléatoire de fonction de répartition F , d'inverse généralisé noté $F^{<-1>}$ et si U est uniforme sur $[0, 1]$ alors $X = F^{<-1>}(U)$ admet pour fonction de répartition F .

Remarque 27 : Si la fonction de répartition est C^1 on dérive pour obtenir la densité.

Application 28 : Si X uniforme sur $[0,1]$ alors on peut déterminer la densité de $Y = X^2$ en dérivant la fonction de répartition.

Développement 1

Proposition 29 : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall x$ point de continuité de F_X alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

Corollaire 30 : Si les variables sont discrètes alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k)$.

Application 31 : Approximation binomiale-poisson : si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ où $np_n \rightarrow \lambda$ alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$

C/ Fonction caractéristique. [CR]

Définition 32 : Fonction caractéristique.

Proposition 33 : La fonction caractéristique caractérise la loi.

Exemple 34 : Fonction caractéristique de la gaussienne.

Développement 2.a)

Théorème 35 : Paul-Lévy.

D/ Fonction génératrice. [WA]

Définition 36 : Fonction génératrice pour les variables aléatoires discrètes.

Proposition 37 : La fonction génératrice caractérise la loi.

Proposition 38 : Toutes les propriétés de la fonction génératrice.

Proposition 39 : Récupération des moments.

Application 40 : Processus de branchement de Galton-Watson.

III/Théorème central-limite. [WA]

Développement 2.b)

Théorème 41 : Théorème central limite.

Application 42 : Dans la méthode de Monte-Carlo, on a un intervalle de confiance de l'intégrale en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Références :

- [CR] Chabanol Ruch Probabilités et statistiques p. 21-70 et Appendice B
- [OUV] Ouvrard Probabilités 2 p. 8
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 160, p. 195, p. 397, p. 411 et p. 438