

LEÇON N° 253 : UTILISATION DE LA NOTION DE CONVEXITÉ EN ANALYSE.

I/ Généralités sur la convexité.

A/ Premières définitions et propriétés. [OBJ] [G] [R]

Définition 1 : Partie convexe.

Exemple 2 : Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes, une boule dans $\mathbb{R}^2$ est convexe.

Exemple 3 : Les demi-espaces sont convexes.

Proposition 4 : Une intersection de convexes est convexe.

Définition 5 : Enveloppe convexe.

Théorème 6 : Théorème de Carathéodory.

Définition 7 : Fonctions convexes, strictement convexes.

Proposition 8 : f est convexe si et seulement si l'épigraphe de f est convexe + annexe.

Application 9 : Si les $(f_i)_{i \in I}$ sont convexes alors $\sup_{i \in I} (f_i)$ est convexe.

Proposition 10 : Une fonction convexe est continue sur l'intérieur du domaine (car y est lipschitzienne) et admet des dérivées à gauche et à droite.

Théorème 11 : Caractérisation de la convexité si f est dérivable et si f' est deux fois dérivable.

Exemple 12 : $\exp$ est convexe et $\ln$ est concave.

Théorème 13 : Caractérisations en dimension supérieure de la convexité.

Application 14 : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe si et seulement si A est positive.

B/ Inégalités de convexité. [G] [R]

Proposition 15 : Inégalité arithmético-géométrique.

Théorème 16 : Inégalité de Hölder.

Corollaire 17 : Inégalité de Minkowski et donc $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 18 : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \frac{2}{\pi}x < \sin(x) < x$.

C/ Recherche d'extrema. [OBJ] [FGNAlg3] [PGCD]

Proposition 19 : Si f convexe, les minimum forment un ensemble convexe.

Théorème 20 : Lorsque la fonction f est strictement convexe et admet un minimum, alors ce minimum est unique.

Exemple 21 : L'existence d'un minimum n'est pas toujours assurée : considérer $\exp$ qui est strictement convexe.

Application 22 : Point de Fermat.

Développement 1

Lemme 23 : log-convexité du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Application 24 : Ellipsoïde de John-Loewner.

Proposition 25 : Méthode de Newton.

Application 26 : Méthode de Héron.

II/ Exemples d'applications dans certains espaces.

A/ Dans les espaces de Hilbert. [HL] [ZQ]

Développement 2.a)

Théorème 27 : Théorème de projection sur un convexe fermé.

Corollaire 28 : Si F est un sev de H alors p_F est linéaire, continue, 1-lipschitzienne.

Corollaire 29 : Si F est un sev fermé de H alors $H = F \oplus F^\perp$.

Application 30 : Existence de l'espérance conditionnelle sur L^2 .

Application 31 : Lemme de séparation d'un point et d'un convexe fermé, application au calcul de l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.

Développement 2.b)

Théorème 32 : Théorème de représentation de Riesz.

Application 33 : Existence des adjoints dans un Hilbert.

B/ Dans les espaces $L^p(\mu)$. [BP]

Définition 34 : Espaces L^p et leurs normes associées pour $p \in [1, +\infty]$.

Théorème 35 : Inégalité de Hölder.

Corollaire 36 : Inégalité de Minkowski.

Proposition 37 : $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Application 38 : Inclusion des L^p si l'espace est de mesure finie, et non inclusion dans le cadre général.

Proposition 39 : Inégalité de Jensen.

Remarque 40 : On retrouve le cas discret.

C/ Applications aux probabilités. [WA] [OUV]

Proposition 41 : Inégalité de Jensen.

Application 42 : Implication des convergences L^p en probabilité.

Proposition 43 : Inégalité de Hoeffding.

Définition 44 : Fonction génératrice.

Proposition 45 : Les propriétés des fonctions génératrices.

Application 46 : Galton-Watson.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 94
- [FGNAlg3] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 3 p. 229
- [R] Rombaldi Éléments d'analyse réelle p. 225-245
- [OBJ] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation p. 26-30
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 142
- [HL] Hirsch-Lacombe Éléments d'analyse fonctionnelle p. 91-96
- [ZQ] Zuily Queffélec Analyse pour l'agrégation p. 205
- [BP] Briane-Pagès Théorie de l'intégration 4ème éd. p. 153
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 160, p.195, p. 328 et p. 392
- [OUV] Ouvrard Probabilités 2 p. 128