

LEÇON N°250 : TRANSFORMATION DE FOURIER. APPLICATIONS.

I/ Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

A/ Définition et premières propriétés. [EA] [GW]

Lemme 1 : Riemann-Lebesgue.

Définition 2 : Définition transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

Remarque 3 : On peut la définir dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$, mêmes types de résultats.

Corollaire 4 : La transformée de Fourier est linéaire et continue.

Exemple 5 : Transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-a|x|}$, $x \mapsto \mathbb{1}_{[a,b]}$ (exemple de f telle que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$).

Définition 6 : Définition de $\check{f}$, $\bar{f}$ et $\tau_a f$.

Proposition 7 : Toutes les propriétés de calculs.

B/ Convolution et théorème d'inversion. [EA] [GW]

Définition 8 : Définition convolution dans L^1 .

Proposition 9 : Lien entre convolution et produit.

Définition 10 : Approximation de l'unité.

Exemple 11 : Noyau de Gauss.

Proposition 12 : Régularisation avec noyau.

Théorème 13 : Formule de dualité.

Théorème 14 : La transformation de Fourier est injective.

Théorème 15 : Formule d'inversion.

Proposition 16 : Lien entre transformée de Fourier et convolution.

C/ Dérivation. [GW]

Proposition 17 : Transformée de Fourier d'une dérivée.

Proposition 18 : Dérivée d'une transformée de Fourier.

Proposition 19 : Transformée de Fourier de la gaussienne.

II/ Extension à $S(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$.

A/ Dans $S(\mathbb{R})$. [GW] [WIL]

Définition 20 : Définition de l'espace de Schwartz.

Proposition 21 : C'est un espace vectoriel et stable par dérivation, multiplication par un polynôme et produit.

Exemple 22 : Les gaussiennes sont dans Schwartz.

Théorème 23 : Stabilité de $S(\mathbb{R})$ par transformation de Fourier.

Théorème 24 : La transformation de Fourier est une application linéaire, bijective et bicontinue de $S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$.

Développement 1

Lemme 25 : Lemme de Freud.

Application 26 : Fonction de Weierstrass : exemple de fonction continue partout nulle part dérivable.

B/ Dans $L^2(\mathbb{R})$. [GW] [EA]

Proposition 27 : $S(\mathbb{R})$ dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 28 : Formule de Fourier-Plancherel dans $S(\mathbb{R})$.

Théorème 29 : Fourier-Plancherel : La transformée de Fourier se prolonge en une isométrie de L^2 dans L^2 et on note $\tilde{f}$ la transformée de Fourier de f sur L^2 .

Proposition 30 : Les transformées de Fourier coïncident sur $L^1 \cap L^2$.

Remarque 31 : Moyen de calcul de la transformée de Fourier dans L^2 : on calcule la transformée de Fourier de $f\mathbb{1}_{[-n,n]}$ et on fait tendre n vers l'infini.

Développement 2

Application 32 : Diagonalisation de la transformée de Fourier sur L^2 .

III/ Applications à d'autres domaines.

A/ En probabilités. [WA]

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 33 : Convergence en loi.

Définition 34 : Fonction caractéristique.

Théorème 35 : Paul-Lévy.

Remarque 36 : La preuve utilise la bijectivité de la transformée de Fourier sur $S(\mathbb{R})$

Application 37 : Théorème central limite.

B/ Pour résoudre des EDPs. [FGNAna4]

Application 38 : Résolution de l'équation de la chaleur périodique.

Références :

- [GW] Gasquet-Witomski Analyse de Fourier p. 127-161
- [EA] El Amrani Analyse de Fourier p. 73-122, p. 239 et p. 246-247
- [WIL] Willem Analyse fonctionnelle p. 130
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 358, p. 401, p. 438
- [FGNAna4] Francinou Gianella Nicolas Analyse 4 p. 49