

LEÇON N° 246 : SÉRIES DE FOURIER. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I/ Coefficients et séries de Fourier.

A/ Résultats préliminaires. [EA]

Définition 1 : $C_{2\pi}^0$, $L_{2\pi}^p$, $L_{2\pi}^2$ est un espace de Hilbert avec son produit scalaire associé.

Définition 2 : $e_n(x) = e^{inx}$ et définition polynômes trigonométriques.

Théorème 3 : L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $C_{2\pi}^0$.

Proposition 4 : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$.

B/ Séries de Fourier. [EA]

Définition 5 : Coefficients de Fourier complexes.

Remarque 6 : Dans $L_{2\pi}^2$ on a $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

Définition 7 : Produit de convolution sur $L_{2\pi}^1$.

Proposition 8 : Toutes les propriétés de calcul des coefficients de Fourier.

Proposition 9 : Riemann-Lebesgue.

Corollaire 10 : Si f est C^k alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ et si $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ et $k \geq 2$ alors f est C^{k-2} .

Remarque 11 : Au plus la fonction f est régulière au plus les coefficients de Fourier décroissent vite.

Définition 12 : Coefficients de Fourier réels.

Remarque 13 : Relation avec $c_n(f)$.

Proposition 14 : Lien entre parité de la fonction f et la nullité des coefficients de Fourier réels.

Définition 15 : Séries de Fourier et sommes partielles.

C/ Sommes de Césaro et noyaux trigonométriques. [EA]

Définition 16 : Somme de Césaro.

Définition 17 : Convergence au sens de Césaro.

Définition 18 : Noyau de Dirichlet.

Proposition 19 : Propriétés sur les noyaux de Dirichlet.

Définition 20 : Noyau de Féjer.

Proposition 21 : Propriétés sur les noyaux de Féjer et son lien avec le noyau de Dirichlet.

II/ Convergence des séries de Fourier.

Théorème 22 : Si f est L^1 et que la série converge alors c'est la série de Fourier.

A/ Convergence au sens de Césaro. [EA]

Théorème 23 : Féjer.

Application 24 : Théorème de Stone-Weierstrass trigonométrique.

Théorème 25 : Injectivité des séries de Fourier.

Proposition 26 : $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$ est linéaire continue injective de norme 1.

B/ Convergence en moyenne quadratique. [EA]

Théorème 27 : Parseval.

Remarque 28 : Réécriture avec les coefficients réels.

C/ Convergence ponctuelle et uniforme. [G]

Théorème 29 : Jordan-Dirichlet.

Corollaire 30 : Dirichlet.

Théorème 31 : La série de Fourier converge normalement si la fonction est continue et C_{pm}^1 .

Application 32 : Calcul de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\sum n = 1 + \infty \frac{1}{(2n-1)^2}$

III/ Application des séries de Fourier.

A/ Calcul de séries. [FGNA2]

Développement 1

Théorème 33 : Calcul des $\zeta(2k)$.

B/ Résolution d'EDP : équation de la chaleur. [ZQ]

Développement 2

Théorème 34 : Résolution à l'aide des séries de Fourier.

C/ Lien entre la théorie de Fourier discrète et continue. [EA]

Proposition 35 : Formule sommatoire de Poisson.

Corollaire 36 : Identité de Jacobi

Références :

- [EA] El Amrani Analyse de Fourier p. 169-201, p. 210
- [G] Gourdon Analyse p. 259
- [FGNA2] Francinou Gianella Nicolas Analyse 2 p. 308
- [ZQ] Zuily Queffelec Analyse pour l'agrégation p. 105