

Leçon 230: Séries de nombres réels ou complexes.
Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques.
Exemples.

Références: El Amrani 1 et 2, Gourdon (Dev), Francénou 1
Voir aussi Hauchecorne pour des contre-exemples

I - Convergence de séries numériques

- 1) Séries convergentes et restes
- 2) Critère de Cauchy - Produit de Cauchy

II - Critères de convergence

- 1) Séries à termes positifs
- 2) Critères généraux

III - Applications

- 1) Séries entières
- 2) Séries de Fourier

DEV 1: Arctan itérés

DEV 2: Abel angulaire et Taubérien faible.

Leçon 230: Séries de nombres réels ou complexes - Comportement des restes et des sommes partielles des séries numériques - Exemples.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Convergence de séries numériques

1) Séries convergentes et restes [ELAH]

DEF 1: On appelle somme partielle de terme général (u_n) le nombre $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On appelle série de terme général u_n , la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

DEF 2: On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite S de la suite (S_n) s'appelle la somme de la série $\sum u_n$ et on la note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

EX 3: $\sum a^k$ converge $\Leftrightarrow |a| < 1$ pour $a \in \mathbb{C}$.

DEF 4: Si $\sum u_n$ converge de somme S , le nombre $R_n = S - S_n$ est appelé le reste d'ordre n de la série. On note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. On a $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

PROPS: On ne change pas la nature de $\sum u_n$ en modifiant un ensemble fini des termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

DEF 6: Étant données deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et $\alpha \in K$, on définit
• la série somme $\sum (u_n + v_n)$ de terme général $(u_n + v_n)$
• la série produit de terme général αu_n . On la note $\alpha \sum u_n$.

PROP 7: Muni de ces opérations, l'ensemble des séries numériques est un K -espace vectoriel.

PROP 8: Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire en général.

PROP 9: Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Contre-ex. 10. $\ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ mais $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$ diverge vers $+\infty$.

DEF 11: On dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement lorsque u_n ne tend pas vers 0.

2) Critère de Cauchy - Produit de Cauchy [ELAH]

THM 12: $\sum u_n$ converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq N, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

EX 13: $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

DEF 14: $\sum u_n$ est dite absolument convergente lorsque $\sum |u_n|$ converge.

THM 15: Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge. De plus $\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

REM 16: La réciproque est fautive: $u_n = -\frac{1}{n}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n}$.

DEF 17: Si $\sum u_n$ converge sans converger absolument, on dit que $\sum u_n$ est semi-convergente.

DEF 18: Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On définit leur série produit comme la $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$.

THM 19: Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right)$.

THM 20: (Hertens) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et l'une des deux converge absolument, alors $\sum w_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right)$.

EX 21: $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exp(z+z') = \exp(z) \exp(z')$.

II - Critères de convergence

1) Séries à termes positifs

REM 22: Tous les résultats sont valables aussi pour un terme général négatif.

LEMME 23: Une série à termes positifs converge si et seulement si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Si la série diverge, on a $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

THM 24: Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Alors :

1) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a $\sum u_n \leq \sum v_n$.

2) Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge également.

EX 25: $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

THM 26 (Domination) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à terme général positif telles que $u_n = O(v_n)$. Alors :

• Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et $\sum_{k=m}^{\infty} u_k = O\left(\sum_{k=m}^{\infty} v_k\right)$.
 • Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ aussi et $\sum_{k=m}^{\infty} u_k = O\left(\sum_{k=m}^{\infty} v_k\right)$.

De même si $u_n = o(v_n)$.

THM 27 (Équivalence) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors :

• les séries ont même nature
 • en cas de convergence, les restes sont équivalents
 • en cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

APPLI 28: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ (critère de Riemann)

THM 29 (Comparaison série-intégrale) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante. Alors $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ ont de même nature. En cas de convergence, on a :
 $\int_m^{+\infty} f(t) dt \leq R_m = \sum_{k=m}^{\infty} u_k \leq \int_m^{+\infty} f(t) dt$

THM 30: Si $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est intégrable sur tout segment $[0, a]$ $\subset \mathbb{R}^+$ et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$, $x_n \rightarrow +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{x_n} f(t) dt$ et $\int_0^{x_n} f(t) dt$ sont de même nature.

EX 31 On définit : $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$
 Un développement asymptotique de (u_n) est :
 $u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{6}}{8n} \ln(n) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

EX 32: On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On a alors :
 $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\gamma > 0$.

THM 32 (Séries de Bertrand) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

2) Critères généraux [ELAM]

THM 33: Soit $\sum u_n$ et $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$. Alors :

• Si $L < 1$, $\sum u_n$ converge absolument
 • Si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge

COR 34: On a le même énoncé si on suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ existe

EX 35: $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge.

THM 36 (D'Alembert) Soit $\sum u_n$. On suppose qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq m_0$, $u_n \neq 0$. On note $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ et $l = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$. Alors :

• Si $L < 1$, $\sum u_n$ converge absolument
 • Si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge

COR 37: Si on suppose que $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ existe, on a le même résultat.

EX 38: $\sum \frac{a^n}{n!}$ convergessi $a < 1$.

THM 39 (Abel) Soit $\sum u_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n b_n$. On suppose que :

1) les a_n sont strictement positifs et (a_n) est décroissante convergente vers 0
 2) les b_n sont réels ou complexes et :
 $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \geq m, \left| \sum_{k=m}^n b_k \right| \leq M$

Alors $\sum u_n$ converge et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$|R_m| = \left| \sum_{n=m}^{\infty} u_n \right| \leq M a_m$$

EX 40: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ décroissante tendant vers 0.
 $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sum a_n \cos(n\theta)$ et $\sum a_n \sin(n\theta)$ convergent

COR 41: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ décroissante tendant vers 0.
 Alors $\sum (-1)^n a_n$ converge. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-1)^k \leq S_n$
 et son reste d'ordre n vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.

EX 42: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ est semi-convergente et on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$

III - Applications

1) Séries entières [ELAT]

DEF 43: On appelle série entière toute série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $z \in \mathbb{C}$.

LEMME 44: (Abel) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $0 < |z| < |z_0|$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument.

PROP 45: Il existe un unique $R \in \mathbb{R}^+$ tel que:

1) Si $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument

2) Si $|z| > R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge

Le nombre R est appelé rayon de convergence de la série

EX 46: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ a pour rayon $R=1$.

REM 47: Il est en général difficile de connaître le comportement de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|=R\}$ (appelé cercle d'incertitude).

PROP 48: (D'Alembert) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon R . Si la suite $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L \in \mathbb{R}^+$, alors $R = \frac{1}{L}$.

EX 49: Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$ est $R = \frac{1}{2}$.

THM 50: (Hadamard) Le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est donné par $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$

EX 51: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{2}$.

THM 52: Une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact du disque ouvert de convergence.

COR 53: $f: z \in D(0, R) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue

THM 54: f est de classe C^{∞} sur $D(0, R)$ et: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z^{n-k}$

DEF 55: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. f est développable en série entière en 0 lorsque il existe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et $a_n \in \mathbb{C}$, $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

PROP 56: Si f est développable en série entière en 0, alors elle est égale sur un voisinage de 0 à sa série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Un développement en série entière est donc unique.

EX 57: $\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

DEV 2

THM 58: (Abel angulaire) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon $R \geq 1$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur $D(0, 1)$. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \exists \rho \in \mathbb{R}^+, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = \rho e^{i\theta}\}$. Alors $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

THM 59: (Tauberien faible): Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série sur $D(0, 1)$. On suppose que $\frac{a_n}{n} = o(\frac{1}{n})$ et $1 \notin \text{SEC}$. Soit $S = \lim_{x \rightarrow 1} x f(x)$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge et $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

2) Séries de Fourier

DEF 60: On définit pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n: x \mapsto e^{inx}$

Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$

On appelle série de Fourier de f la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$

THM 61: (Parseval) Pour tout $f \in L^2_{2\pi}$, on a $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ dans $L^2_{2\pi}$. De plus, $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

EX 62: En échantonnant $f: x \in]-\pi, \pi[\mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ 2 π -périodique on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.