

LEÇON N° 245 : FONCTIONS HOLOMORPHES ET MÉROMORPHES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{C}$. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Dans la suite on notera Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

I/ Régularité des fonctions à variable complexe.

A/ Fonctions holomorphes. [T]

Définition 1 : Une fonction $\mathbb{C}$ -dérivable est dite holomorphe.

Exemple 2 : Les polynômes et fractions rationnelles sans pôles en z sont holomorphes.

Proposition 3 : $\mathcal{H}(\Omega)$ est stable par somme, produit et composition.

Proposition 4 : Propriétés équivalentes de l'holomorphie (La différentielle est une similitude directe).

Corollaire 5 : Équations de Cauchy-Riemann.

Exemple 6 : $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$.

B/ Fonctions analytiques. [T]

Définition 7 : Définition fonction analytique.

Proposition 8 : $\mathcal{A}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre.

Théorème 9 : Une fonction DSE est holomorphe sur son disque de convergence et la dérivée est la dérivée terme à terme.

Remarque 10 : En appliquant le même argument sur f' on peut alors en déduire que f est infiniment $\mathbb{C}$ -dérivable sur le disque de convergence.

Corollaire 11 : $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$.

Exemple 12 : Holomorphie de $\exp$, $\sin$ et $\cos$ sur $\mathbb{C}$, analyticité de $z \mapsto \frac{1}{(a-z)^p}$ sur $D(a, |a|)$.

II/ Intégration sur un chemin et lien avec l'holomorphie.

A/ Intégrale sur un chemin et formule de Cauchy. [T]

Définition 13 : Définition indice.

Proposition 14 : Propriétés sur l'indice.

Exemple 15 : Lacet cercle de centre a et de rayon R : $\gamma_{a,R} : t \mapsto a + Re^{it}$, l'indice d'un point dans le disque est 1 et dans l'extérieur c'est 0.

Théorème 16 : Goursat.

Théorème 17 : Formule de Cauchy dans un convexe.

Corollaire 18 : Formule de Cauchy dans un cercle.

B/ Applications de la formule de Cauchy. [T]

Théorème 19 : Analyticité des fonctions holomorphes.

Théorème 20 : Inégalités de Cauchy.

Corollaire 21 : Théorème de Liouville : Toute fonction entière bornée est constante.

Application 22 : Théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 23 : Principe du maximum global.

C/ Primitives et logarithmes. [AM] [Q²]

Proposition 24 : Toute fonction sur un disque admet une primitive holomorphe.

Corollaire 25 : Toute fonction holomorphe admet localement des primitives.

Corollaire 26 : Une fonction holomorphe ne s'annulant pas sur $\mathcal{U}$ étoilé admet un logarithme sur $\mathcal{U}$.

Développement 1

| Application 27 : Indécomposabilité de la loi de Poisson.

D/ Convergence de suites de fonctions holomorphes. [T]

| **Théorème 28** : Holomorphie stable par convergence uniforme sur tout compact.

| **Exemple 29** : La fonction ζ bien définie.

| **Théorème 30** : Holomorphie sous signe intégral.

| Application 31 : La fonction Γ est bien définie sur $\pi_0 = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$

E/ Prolongement des fonctions holomorphes. [T] [OBJ]

| **Théorème 32** : Théorème des zéros isolés.

| Corollaire 33 : Prolongement analytique.

| Application 34 : La fonction Γ se prolonge méromorphiquement sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ et calcul des résidus.

III/ Méromorphie et théorème des résidus. [T]

| **Définition 35** : Les différentes singularités isolées (effaçable, pôle, essentielle).

| **Proposition 36** : Définition équivalentes des différentes singularités.

| **Définition 37** : Fonctions méromorphes.

| **Théorème 38** : Formule de Cauchy dans une couronne.

| Corollaire 39 : Développement en série de Laurent.

| Remarque 40 : Lien entre série de Laurent et les singularités.

| **Définition 41** : Résidu de f en a .

| **Proposition 42** : Formules de calcul des résidus.

| **Théorème 43** : Théorème des résidus.

Développement 2

| Application 44 : Formule des compléments.

Références :

- [T] Tauvel Analyse complexe pour la licence p. 50-102
- [AM] Amar-Mathéron Analyse complexe p. 125
- [OBJ] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation p. 82
- [Q²] Queffélec Queffélec Analyse complexe et applications p. 209, p. 425