

LEÇON N° 244 : EXEMPLES D'ÉTUDES ET D'APPLICATIONS DE FONCTIONS USUELLES ET SPÉCIALES

I/ Fonctions usuelles liées à l'exponentielle.

A/ Fonction exponentielle. [T]

Définition 1 : Exponentielle complexe.

Proposition 2 : Holomorphe sur $\mathbb{C}$, $\exp' = \exp$ et propriétés de calcul.

Théorème 3 : C'est un morphisme continu surjectif de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.

B/ Fonctions circulaires. [T] [FGNAlg1]

Définition 4 : cos et sin en utilisant exp.

Proposition 5 : DSE cos et sin.

Proposition 6 : Expression avec l'exponentielle $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ et $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

Application 7 : Polynômes de Tchébychev.

Définition 8 : Arccos et Arcsin + annexe avec les graphes.

C/ Fonctions logarithmes. [T]

Définition 9 : exp est bijective sur $\mathbb{R}$ de réciproque ln.

Définition 10 : Arguments de z , détermination continue de l'argument sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$.

Proposition 11 : Détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Proposition 12 : Développement en série entière de la détermination du logarithme.

Corollaire 13 : On peut donc définir les fonctions puissances sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

II/ Exemples de fonctions définies par une intégrales à paramètres.

A/ Fonction Γ d'Euler. [G] [R] [OBJ] [PGCD]

Définition 14 : Fonction Γ .

Théorème 15 : Γ est C^∞ , valeur de $\Gamma^{(k)}$, relation fonctionnelle et limites.

Théorème 16 : Bohr-Mollerup : Caractérisation de la fonction *Gamma*.

Théorème 17 : Prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, les résidus sont $\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

Développement 1

Proposition 18 : Formule des compléments.

Proposition 19 : Par la méthode de Laplace, on obtient la formule de Stirling intégrale.

B/ Fonction β et applications en probabilité. [G] [GK]

Définition 20 : Fonction β .

Proposition 21 : Équations fonctionnelles de β .

Proposition 22 : Lien entre β et Γ .

Définition 23 : Lois Γ et β en probabilité.

Application 24 : Si $X_1, \dots, X_n$ iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ alors $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$, si X et Y indépendantes de loi respectives $\Gamma(r, \lambda)$ et $\Gamma(s, \lambda)$ alors $X + Y$ de loi $\Gamma(r + s, \lambda)$.

III/ Exemple de fonctions définies par une série : la fonction ζ de Riemann.

A/ Propriétés générales de ζ . [G] [FGNAAna2]

Définition 25 : Fonction ζ .

Proposition 26 : ζ définie sur $\pi_1 = \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 1\}$ et majoration.

Proposition 27 : $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ et $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1$.

Théorème 28 : La fonction ζ se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$ en ayant 1 en unique pôle de résidu 1.

Définition 29 : $f : z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ se développe en série entière au voisinage de 0 et définition des coefficients de Bernoulli.

Proposition 30 : Propriétés des coefficients de Bernoulli.

Développement 2

Théorème 31 : Calcul des $\zeta(2k)$ en passant par les séries de Fourier.

Corollaire 32 : $\zeta(2k) \in \pi^{2k} \mathbb{Q}$ donc $\zeta(2k)$ est irrationnel et transcendant.

Remarque 33 : Pas de telle formule explicite trouvée à ce jour pour $\zeta(2k+1)$.

B/ Lien avec les nombres premiers. [GK] [ROM]

Théorème 34 : Produit eulérien de ζ .

Application 35 : $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

Application 36 : Il n'existe pas de mesure de probabilité μ sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\mu(n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n}$.

Théorème 37 : (Culturel) Théorème de De La Vallée Poussin : $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$.

Références :

- [T] Tauvel Analyse complexe pour la licence p. 43-45, p.62 et p. 79
- [G] Gourdon Analyse p. 158 et p. 295
- [FGNAlg1] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 1 p. 222
- [FGNAna2] Francinou Gianella Nicolas Analyse 2 p. 308
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 339
- [R] Rombaldi Éléments d'analyse réelle p. 364
- [OBJ] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation p. 82
- [GK] Garet-Kurtzmann De l'intégration aux probabilités p. 56-57, p. 145-148 et p. 461
- [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie p. 308