

LEÇON N° 243 : SÉRIES ENTIÈRES, PROPRIÉTÉS DE LA SOMME. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I/ Généralités.

A/ Séries entières, disque de convergence. [EA]

Définition 1 : Série entière.

Définition 2 : Rayon de convergence et disque de convergence.

Lemme 3 : Convergence absolue dans le disque de convergence et divergence grossière sinon, convergence normale dans un disque strictement inclus.

Exemple 4 : $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1.

Remarque 5 : Sur le cercle d'incertitude toutes les situations sont possibles. (considérer les séries $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$).

Théorème 6 : Règle d'Alembert.

Exemple 7 : Calcul du rayon de convergence de $\sum \frac{2^n z^{2n+1}}{n+1}$.

Théorème 8 : Règle de Cauchy et d'Hadamard.

Exemple 9 : $\sum \frac{n}{2^n} z^n$ a pour rayon de convergence 2.

B/ Opérations sur les séries entières. [EA] [G]

Proposition 10 : Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.

Théorème 11 : Stabilité de la somme et du produit et rayons de convergences associés.

Exemple 12 : Cas où le rayon est $+\infty$ alors que les deux séries de départ ont un rayon de convergence fini.

Théorème 13 : Inverse d'une série entière.

II/ Régularité de la somme.

A/ Régularité sur le disque de convergence. [G]

Théorème 14 : Holomorphe dans le disque.

Corollaire 15 : Unicité des coefficients et valeurs : $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Théorème 16 : La fonction à variable réelle associée est C^∞ .

Exemple 17 : Série primitive.

Application 18 : DSE de Arctan, Arcsin, Arccos, $\ln(1 + \cdot)$.

B/ Régularité sur le cercle d'incertitude. [G]

Théorème 19 : Théorème d'Abel Angulaire (faire une annexe avec le dessin du disque).

III/ Fonctions développables en série entière.

A/ Sur $\mathbb{C}$. [T] [FGNAna2]

Définition 20 : DSE au voisinage d'un point, fonctions analytiques.

Exemple 21 : $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Théorème 22 : Formule de Cauchy.

Corollaire 23 : Les fonctions holomorphes sont analytiques.

Développement 1

Application 24 : Calcul des $\zeta(2k)$ avec nombres de Bernouilli.

Proposition 25 : Principe des zéros isolés.

Remarque 26 : On peut retrouver l'unicité du DSE grâce à cette propriété.

Théorème 27 : Liouville.

Application 28 : Théorème de d'Alembert-Gauss.

B/ Sur $\mathbb{R}$. [G]

Définition 29 : DSE au voisinage d'un point sur $\mathbb{R}$.

Exemple 30 : La fonction $f : x \mapsto e^{\frac{-1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sinon. La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais pas DSE en 0.

Proposition 31 : Condition suffisante pour être DSE en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Théorème 32 : DSE si et seulement si le reste CVS vers 0.

Théorème 33 : Théorème de Bernstein.

III/ Applications.

A/ Résolution d'équations différentielles. [FGNAna4] [ZQ]

Remarque 34 : Peut être pertinent de regarder les solutions DSE d'une équ. diff.

Théorème 35 : Résoudre $y'' + py' + qy = 0$ avec DSE.

Application 36 : Résolution de l'équation d'Airy $y'' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Développement 2

Proposition 37 : Résolution de l'équation de Bessel grâce aux séries entières.

B/ La fonction génératrice en probabilités. [WA] [Q²]

Définition 38 : Fonction génératrice.

Théorème 39 : Les différentes propriétés de la fonction génératrice.

Théorème 40 : Récupération des moments.

Application 41 : Galton-Watson.

Application 42 : Indécomposabilité de la loi de Poisson.

Références :

- [EA] El Amrani Suites et séries de fonctions p. 229-256
- [G] Gourdon Analyse p. 236, p. 251 et p. 252
- [T] Tauvel Analyse complexe pour la licence p. 40, p. 50, p. 77 et p. 84
- [FGNAna2] Francinou Gianella Nicolas Analyse 2 p. 308
- [FGNAna4] Francinou Gianella Nicolas Analyse 4 p. 101
- [ZQ] Zuily-Queffelec Analyse pour l'agrégation p. 408 et p. 435
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 160, p. 195
- [Q²] Queffelec Queffelec Analyse complexe et applications p. 209, p. 425