

# LEÇON N°241 : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un evn de dimension fini (donc complet) et  $X$  un ensemble.

## I/ Modes de convergence.

### A/ Suites de fonctions. [EA] [G]

**Définition 1 :** Convergence simple.

**Remarque 2 :** La limite est unique.

**Définition 3 :** Convergence uniforme.

**Exemple 4 :**  $x \mapsto x^n$  converge simplement mais pas uniformément (sauf sur un segment du type  $[0, a]$  avec  $a < 1$ ) + convergence simple de  $(1 - \frac{x}{n})$  vers  $e^{-x}$ .

**Proposition 5 :** Critère de Cauchy uniforme.

**Application 6 :** Si une suite de polynômes converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ , la limite est un polynôme.

**Définition 7 :** On pose  $B(X, E)$  l'ensemble des fonctions bornées et on le munit de  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Proposition 8 :**  $f_n$  converge uniformément vers  $f \iff \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

**Remarque 9 :** En étudiant la norme infinie on a donc un critère pour montrer qu'une suite de fonction ne converge pas uniformément.

**Exemple 10 :**  $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 11 :**  $B(X, E)$  est complet.

**Théorème 12 :** Premier théorème de Dini.

**Application 13 :** Il existe une suite de polynôme converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers  $|\cdot|$ .

**Théorème 14 :** Théorème de Stone-Weierstrass.

### B/ Séries de fonctions. [EA] [G]

**Définition 15 :** Série de fonction.

**Définition 16 :** Convergence simple et uniforme comme avant et reste de la série.

**Proposition 17 :** Si  $\sum f_n$  CVU alors  $f_n$  CVU vers 0.

**Proposition 18 :**  $\sum f_n$  CVU  $\iff$  le reste de la série CVU vers 0.

**Exemple 19 :** Cas de  $u_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$ .

**Définition 20 :** Convergence normale.

**Exemple 21 :**  $\sum xe^{-nx}$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ .

**Proposition 22 :** CVN  $\implies$  CVU  $\implies$  CVS.

### C/ Cas des séries entières. [G]

**Définition 23 :** Série entière.

**Lemme 24 :** Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.

**Théorème 25 :** Soit  $\sum u_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  alors  $x \mapsto \sum u_n x^n$  converge normalement sur tout disque de rayon  $r < R$ .

## II/ Régularités de la limite.

### A/ Continuité. [EA] [WIL]

Soit  $X$  une partie non vide d'un evn  $F$ .

**Théorème 26 :** La convergence uniforme conserve la continuité.

**Théorème 27 :** Théorème de double limite.

**Remarque 28 :** Réécriture dans le cas des séries de fonctions.

**Exemple 29 :**  $\sum \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ .

## Développement 1

**Application 30** : Étude de la fonction de Weierstrass : fonction continue partout nul part dérivable.

### B/ Dérivabilité. [EA] [PGCD]

**Théorème 31** : Dérivation des suites de fonctions.

**Remarque 32** : Réécriture dans le cas des séries de fonctions.

**Remarque 33** : On peut le réécrire pour les fonctions de classe  $C^p$ .

**Exemple 34** : La fonction  $\zeta$  est  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ .

**Théorème 35** : Intersion limite-différentielle.

**Application 36** : Différentielle de l'exponentielle matricielle.

### C/ Intégration des séries de fonctions. [EA]

**Théorème 37** : Convergence uniforme et interversion limite intégrale.

**Théorème 38** : Théorème d'inversion série intégrale.

**Exemple 39** :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$ .

## III/ Application aux séries de Fourier. [EA] [FGNAna2] [ZQ]

**Définition 40** : Définition des coefficients de Fourier.

**Définition 41** : Séries de Fourier.

**Proposition 42** : Parité de la fonction et lien avec l'annulation des coefficients de Fourier réels.

**Théorème 43** : Théorème de Dirichlet.

**Application 44** : Expression des  $\zeta(2k)$ .

**Théorème 45** : La série de Fourier converge normalement si la fonction est continue et  $C^1_{\text{pm}}(\mathbb{R})$ .

## Développement 2

**Application 46** : Résolution de l'équation de la chaleur dans une barre.

## Références :

- [EA] El Amrani Suites et séries de fonctions p. 139-201
- [EA] El Amrani Analyse de Fourier p. 169
- [G] Gourdon Analyse p. 220, p. 236
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 109
- [FGNAna2] Francinou Gianella Nicolas Analyse 2 p. 308
- [ZQ] Zuily Queffelec Analyse pour l'agrégation p. 105
- [WIL] Willem Analyse fonctionnelle p. 130