NOM : CARETTE Prénom : Titouan Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 157 - Endomorphisme trigonalisable, Endomorphisme nilpotent.

Autre sujet :

- $\mathbb{K}$ est un corps quelconque
- E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie
- On identifiera souvent matrices et endomorphisme.

I] - Motivations.

def 1 : similitude. A est semblable à B ($A \simeq B$) ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telque $A = PBP^{-1}$.

prop 2 : la similitude est une ~~classe~~ relation d'équivalence.

Rq 3 : $A^n = PB^nP^{-1}$ On peut calculer les puissances de A en trouvant B avec une forme intéressante.

Rq 4 : Une classe de similitude correspond aux représentation d'un même endomorphisme dans différentes bases, P est la matrice de passage.

1) Nilpotence.

def 2 : nilpotence. A est nilpotente si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Le plus petit de ces p est appellé indice de nilpotence de A.

Rq 5 : Si A et B nilpotentes et commutent alors AB et $A+B$ sont aussi nilpotentes. Cependant l'ensemble des matrices nilpotentes n'est pas un $\mathbb{K}$-ev. ex : $\begin{pmatrix} 0&0\\1&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&1\\0&0 \end{pmatrix}$

Rq 6 : L'exponentielle d'une matrice nilpotente N est une somme finie de puissance de N.

Def 7 : Unipotence. A est unipotente ssi $A = I_n + N$ avec N nilpotente

Rq 8 : $(I_n + N)^t = \sum_{k=0}^{p} \binom{t}{k} N^k$ avec p indice de nilpotence de N.

Rq 9 : Exp envoie les matrices nilpotentes sur des matrices unipotentes.

2) Diagonalisation.

def 10 : A diagonalisable ssi ~~il existe~~ elle est semblable à une matrice diagonale.

i.e. il existe une base dans laquelle A est diagonale.

i.e : il existe une décomposition de l'espace en somme directe de sous espace stable où A est une homothétie.

Rq 11 : Si D diagonale : $D = \begin{pmatrix} d_1 & (0) \\ (0) & d_n \end{pmatrix}$, $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & (0) \\ (0) & d_n^k \end{pmatrix}$, $Exp(D) = \begin{pmatrix} e^{d_1} & (0) \\ (0) & e^{d_n} \end{pmatrix}$

Rq 12 : si N nilpotente et diagonalisable alors $N = 0$.

3) Trigonalisation

def 13 : A est trigonalisable ssi elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure i.e. il existe une base où A est triangulaire

Rq 14: A triangulaire et nilpotente $\Leftrightarrow$ A n'a que des zéros sur sa diagonale.

ex: $\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}\right\}p$ est nilpotente d'indice p.

def 15: ~~Une suite~~ Un drapeau est une suite (F_i) finie de sous espaces vectoriels de E telle que :

$\forall i \in [\![0,k]\!]\; F_i \subsetneq F_{i+1}$ et $F_0 = \{0\}$.

Il est dit total si $F_n = E$ et $i \in [\![0,n]\!]$ ~~pour un certain~~

Un drapeau est stable par A si tout les F_i sont stable par A.

prop 16: A est trigonalisable ssi il existe un drapeau totale stable par A.

3) Applications

Application 17: Suite récurrentes linéaires d'ordre n. systèmes sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ d'où
$$X_n = A^n X_0$$

Application 18: ~~Syst~~ Equation différentielle linéaire d'ordre n homogène, sous la forme $X'(t) = AX(t)$ d'où :
$$X(t) = X(0)\,Exp(A)$$

Application 19: Suite récurrente simultanées d'ordre 1.
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$
sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ encore.

II) Méthode effective et Caractérisation.

1) Valeurs propres

def 20: λ est valeur propre de u ssi $\exists x \in E$ $u(x) = \lambda x$.
x est appelée vecteur propre associée à la valeur propre λ.

l'ensemble des valeurs propre de u est le spectre de u noté $Sp(u)$.

l'ensemble des vecteurs propre associés à λ est Le sous espace propre associé à λ noté E_λ.

On a : $E_\lambda = \ker(u - \lambda id)$.

prop 21: u diagonalisable $\Leftrightarrow$ il existe une base de vecteur propre.
$\Leftrightarrow$ E est somme directe de sous espaces propres.

prop 22: si u nilpotente alors $Sp(u) = \{0\}$.

2) Polynôme caractéristique.

$\phi_u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow End(E)$
$\quad X \longmapsto u$

, $\mathbb{K}[u] = \phi_u(\mathbb{K}[X])$ est une sous algèbre commutative de $End(E)$

def 23: Le polynôme $\chi_u = \det(X_{id} - u)$ est appelé polynôme caractéristique de u.

prop 24: ~~λ valeur~~ $\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$.

Ainsi $Sp(u)$ est fini de taille au plus $\dim(E)$.

prop 25: u trigonalisable $\Leftrightarrow$ χ_u scindé.
Ainsi si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos tout les

endomorphisme sont trigonalisables.

~~Rq~~ **Déf 26 :** la multiplicité de λ_i dans χ_u est notée α_i et appelée multiplicité algébrique de λ_i

prop 27 : si A et B commutent et sont trigonalisables, alors elles sont trigonalisable dans une même base.

prop 28 : si A trigonalisable alors : $\det(A) = \prod_{\lambda_i \in Sp(A)} \lambda_i^{\alpha_i}$ et $\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda_i \in Sp(A)} \alpha_i \lambda_i$

Application 29 : Théorème de l'amitié, si dans un graphe tout les sommets ont exactement un voisin en commun alors il existe un sommet relié à tout les autres. DEV 1

Thm 30 : Cayley Hamilton : $\chi_u(u) = 0$.

Lemme 31 : Lemme des noyaux : Soient (P_i) polynômes premiers entre eux et $u \in End(E)$.

$$\mathrm{Ker}\left(\prod_i P_i(u)\right) = \bigoplus_i \mathrm{Ker}\, P_i(u)$$

Déf 32 : La suite des noyaux itérés $\mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i id)^n\right)$ avec $\lambda_i \in Sp(u)$ est stationnaire quand $n \geq \alpha_i$.

On appelle $F_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i id)^{\alpha_i}\right)$ ~~de~~ le sous espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.

prop 33 : $E = \bigoplus_{\lambda_i \in Sp(u)} F_{\lambda_i}$ si χ_u est scindé.

Application : Décomposition de Dunford : u triga $\Leftrightarrow \exists ! (d,n)$ $u = d+n$ d diag et n nilpotent

Prop 34 : u diagonalisable $\Leftrightarrow$ χ_u scindé à racines simple.

III - ~~Application~~ Cas Nilpotents

Prop 35 : u nilpotent $\Rightarrow Sp(u) = \{0\}$

Prop 36 : u nilpotent $\Leftrightarrow \chi_u = X^n$

Lemme 37 : u nilpotent $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*$ $\mathrm{tr}(u^k) = 0$.

Application 38 : Théorème de Burnside : Un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ est finie ssi il est d'exposant finie. DEV 2

prop 39 : $(u-\lambda_i id)_{|F_{\lambda_i}}$ est nilpotent.

prop 40 : la suite $\dim\left(\mathrm{Ker}(u-\lambda_i id)^{i+1}\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(u-\lambda_i id)^{i}\right)$ est décroissante.

prop 41 : Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable sous la forme d'une matrice ~~triang~~ diagonale par blocs de blocs $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

Thm 42 : Réduction de Jordan.

On appelle bloc de Jordan les matrices de taille $n \times n$ $J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix}$.

Toute endomorphisme u trigonalisable peut être mis sous forme diagonale par blocs où les blocs sont des bloc de Jordan $(J_{\lambda,n})$ où les λ sont les valeurs propres de u.

Application 43 : Calcul des puissances : $(J_{\lambda,n})^m = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{k} \lambda^{m-k} N^k$