

LEÇON N°239 : FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I/ Régularité et comportement asymptotique d'intégrales à paramètres.

Théorème 1 : Théorème de convergence dominée.

A/ Continuité. [BP]

Théorème 2 : Continuité sous signe intégral.

Remarque 3 : Comme la continuité est une propriété locale, on peut se contenter de regarder sur les compacts.

Application 4 : La transformée de Fourier sur L^1 est bien définie et continue.

B/ Dérivabilité. [BP] [GW] [FGNAna3]

Théorème 5 : Dérivation sous signe intégral.

Développement 1

Application 6 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet en faisant apparaître un paramètre.

Remarque 7 : On peut généraliser ce théorème aux fonctions C^k .

Application 8 : Calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne.

C/ Holomorphicité et résidus. [T]

Théorème 9 : Holomorphicité sous signe intégral.

Application 10 : La fonction Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Théorème 11 : Théorème des résidus.

Développement 2

Lemme 12 : Si $0 < a < 1$, $I_a = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

Application 13 : Formule des compléments.

D/ Comportement asymptotique. [PGCD]

Proposition 14 : Méthode de Laplace.

Application 15 : Formule de Stirling intégrale par la fonction Γ .

II/ Convolution et transformée de Fourier.

A/ Convolution et régularisation. [BP]

Définition 16 : Convolé de fonctions L^1 et L^p , L^p et L^q .

Proposition 17 : L^1 est une algèbre commutative ne possédant pas d'unité pour la convolution.

Application 18 : La densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est la convolée des deux densités respectives.

Définition 19 : Suite régularisante.

Exemple 20 : Noyau de Gauss.

Corollaire 21 : C_c^∞ est dense dans L^p .

Application 22 : $S(\mathbb{R})$ est dense dans L^2 .

B/ Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$. [GW]

Lemme 23 : Riemann-Lebesgue.

Définition 24 : Définition transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

Corollaire 25 : La transformée de Fourier est linéaire et continue.

Exemple 26 : Transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-a|x|}$, $x \mapsto \mathbf{1}_{[a,b]}$ (exemple de f telle que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$).

Proposition 27 : Propriétés de calcul de la transformée de Fourier.

Proposition 28 : Lien entre convolution et transformée de Fourier.

Théorème 29 : Formule de dualité.

Proposition 30 : Formule d'inversion de Fourier.

Corollaire 31 : Injectivité de la transformée.

Proposition 32 : Lien entre dérivation et transformée de Fourier.

C/ Transformée de Fourier en probabilité. [WA] [ZQ]

Définition 33 : Fonction caractéristique.

Remarque 34 : Il s'agit de la transformée de Fourier dans le cadre d'une mesure de probabilité.

Exemple 35 : Fonction caractéristique d'une gaussienne.

Théorème 36 : Théorème de Paul-Lévy.

Application 37 : Théorème central limite.

Références :

- [BP] Briane Pagès Théorie de l'intégration p. 138, p. 259
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 358, p. 438
- [GW] Gasquet-Witomski Analyse de Fourier p. 128-138, p. 133
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 339
- [T] Tauvel Analyse complexe pour la licence p. 91, p. 103
- [FGNAna3] Francinou Gianella Nicolas Analyse 3 p. 214
- [ZQ] Zuily Queffelec Analyse pour l'agrégation p. 536