

LEÇON N° 235 : PROBLÈMES D'INTERVERSION DE SYMBOLES EN ANALYSE.

I/ Suites et séries de fonctions.

A/ Intersion limite-limite. [EA] [HAU]

Définition 1 : CVS et CVU.

Exemple 2 : Pour $f_n(x) = x^n$ on ne peut pas intervertir les deux limites :
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$

Théorème 3 : Théorème de double limite.

Proposition 4 : Si CVU et continue alors la limite est continue.

Corollaire 5 : Théorème de double limite pour les séries de fonctions.

Exemple 6 : $\zeta(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$.

B/ Intersion limite-dérivée et dérivée/dérivée. [EA] [HAU] [PGCD]

Théorème 7 : Théorème inversion limite-dérivée.

Exemple 8 : ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Contre-exemple 9 : L'intersion limite-dérivée est fausse pour $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

Développement 1

Théorème 10 : Intersion limite-différentielle par la connexité.

Application 11 : Différentielle de l'exponentielle matricielle.

Théorème 12 : Schwarz.

Application 13 : La hessienne est symétrique permet d'étudier les extrema d'une fonction.

C/ Intersion de quantificateurs. [G] [HL]

Théorème 14 : Théorèmes de Dini.

Application 15 : Existence d'une suite de polynôme convergeant uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1, 1]$.

Théorème 16 : Théorème de Heine.

D/ Intersion limite-intégrale sur un segment. [EA] [T]

Théorème 17 : Intersion limite-intégrale pour CVU.

Exemple 18 : $f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$, on calcule l'intégrale quand $n \rightarrow +\infty$.

Théorème 19 : Si CVU on peut intersion somme et intégrale.

Application 20 : Formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes.

II/ Théorèmes d'intersion en théorie de l'intégration.

A/ Les théorèmes fondamentaux. [BP]

Théorème 21 : Converge monotone.

Corollaire 22 : Intersion somme-intégrale dans le cas positif.

Corollaire 23 : Lemme de Fatou.

Remarque 24 : Utile pour montrer qu'une limite est infinie.

Théorème 25 : Convergence dominée.

Exemple 26 : Calcul de $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$ selon les valeurs de α .

Corollaire 27 : Si $\sum \int f_n(x) dx < +\infty$ alors on intervertit somme et intégrale.

B/ Conséquences sur les intégrales à paramètres. [BP] [FGNAna3]

Théorème 28 : Continuité sous signe intégral.

Application 29 : La transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ est bien définie et continue.

Théorème 30 : Dérivabilité sous signe intégral.

Développement 2

| Application 31 : Intégrale de Dirichlet.

| Application 32 : Transformée de Fourier d'une gaussienne.

| Théorème 33 : Holomorphie sous signe intégral.

| Application 34 : La fonction Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

C/ Intersion intégrale-intégrale. [BP] [FGNAna2]

| Théorème 35 : Fubini-Tonelli.

| Application 36 : Intégrale de Gauss.

| Théorème 37 : Fubini.

| Corollaire 38 : Intersion somme-somme.

| Application 39 : Calcul des $\zeta(2k)$ pour tout $k \geq 1$.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 31 et p. 228
- [HAU] Hauchecorne Les contre-exemples en mathématiques p. 235 et p. 241
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 109
- [EA] El Amrani Suites et séries de fonction p. 139-201
- [HL] Hirsch-Lacombe Éléments d'analyse fonctionnelle p. 26
- [BP] Briane Pagès Théorie de l'intégration p. 131-138 et p. 221
- [T] Tauvel Analyse complexe pour la licence p. 91
- [FGNAna2] Francinou Gianella Nicolas Analyse 2 p. 308
- [FGNAna3] Francinou Gianella Nicolas Analyse 3 p. 214