

LEÇON N° 234 : FONCTIONS ET ESPACES DE FONCTIONS LEBESGUE-INTÉGRABLES.

Dans la suite, on posera $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

I/ Construction de l'intégrale et théorèmes d'intégrations

A/ Cas des étagées et mesurables positives [BP]

Définition 1 : Définition fonction étagée positive et intégrale.

Définition 2 : Définition fonction mesurable positive et intégrale.

Proposition 3 : Lemme fondamental d'approximation des fonctions mesurables positives par les étagées positives.

Proposition 4 : Croissance de l'intégrale.

Théorème 5 : Convergence monotone.

Théorème 6 : L'intégrale est croissante, additive et vérifie la positive homogénéité.

Proposition 7 : Si A est de mesure nulle pour μ alors $\int_A f d\mu = 0$.

Corollaire 8 : Si f et g sont égales presque partout alors leurs intégrales aussi.

B/ Fonctions Lebesgue-intégrable. [BP]

Définition 9 : Intégrabilité sur μ et espace $L^1(\mu)$.

Exemple 10 : Mesure de comptage et espace $l^1(\mu)$.

Exemple 11 : L'intégrale de Lebesgue généralise l'intégrale de Riemann.

Remarque 12 : Toutes les propriétés de l'intégrale restent vraies pour les fonctions intégrables.

C/ Théorèmes d'intégration. [BP]

Lemme 13 : Lemme de Fatou.

Exemple 14 : Si des fonctions (f_n) intégrables convergent simplement vers f et si $\sup \int_X f_n d\mu < +\infty$ alors $f \in L^1(\mu)$.

Théorème 15 : Convergence dominée.

Contre-exemple 16 : $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x)$ est telle que : $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$ ne converge pas vers 0, l'hypothèse de domination n'est ici pas vérifiée.

Application 17 : La suite $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx$ converge et vaut $\frac{1}{\alpha-1}$ si $\alpha > 1$.

Application 18 : Continuité et dérivabilité sous signe intégral.

Théorème 19 : Fubini-Tonelli.

Application 20 : Calcul de l'intégrale de Gauss par le changement de variable polaire.

Théorème 21 : Fubini.

Corollaire 22 : En utilisant la mesure de comptage on retrouve le théorème de Fubini pour les sommes permettant d'invertir deux sommes.

II/ Espaces L^p .

Dans toute la suite on considère $p \in [1, +\infty]$ et q son exposant conjugué ie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

A/ Construction et premières propriétés. [BP] [BREZ]

Définition 23 : Définition de l'espace $L^p(\mu)$ et $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ avec leurs normes associées.

Exemple 24 : Non inclusion dans le cas général pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, inclusion si segment ou mesures finies.

Théorème 25 : Inégalité de Hölder.

Corollaire 26 : Inégalité de Minkowski.

Proposition 27 : Les espaces sont des espaces vectoriels normés.

Développement 1

Théorème 28 : Riesz-Fischer : $L^p(\mu)$ est complet.

Proposition 29 : La norme $\|\cdot\|_2$ dérive d'un produit scalaire et fait donc de $L^2(\mu)$ un Hilbert.

B/ Convolution et régularisation. [BP] [BREZ]

Définition 30 : Convolé de fonctions L^1 et L^p , L^p et L^q .

Proposition 31 : L^1 est une algèbre commutative ne possédant pas d'unité pour la convolution.

Application 32 : La densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes est la convolée des deux densités respectives.

Définition 33 : Suite régularisante.

Exemple 34 : Noyau de Gauss.

Corollaire 35 : C_c^∞ est dense dans L^p .

Application 36 : $S(\mathbb{R})$ est dense dans L^2 .

C/ Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$. [GW] [EA]

Lemme 37 : Riemann-Lebesgue.

Définition 38 : Définition transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$.

Corollaire 39 : La transformée de Fourier est linéaire et continue.

Exemple 40 : Transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-a|x|}$, $x \mapsto \mathbb{1}_{[a,b]}$ (c'est donc un exemple de f telle que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$).

Proposition 41 : Toutes les propriétés de calculs.

Proposition 42 : Formule d'inversion.

Proposition 43 : Injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 44 : Lien entre dérivation et transformée de Fourier.

Application 45 : Transformée de Fourier de la gaussienne.

Théorème 46 : Plancherel et définition de la transformée dans L^2 comme extension de la transformée sur $S(\mathbb{R})$.

Développement 2

Application 47 : Diagonalisation de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

Références :

- [BP] Briane Pagès Théorie de l'intégration p. 71, p. 113-174 et p. 259-273
- [BREZ] Brézis Analyse fonctionnelle p. 57 et p. 66
- [GW] Gasquet-Witomski Analyse de Fourier p. 128-161
- [EA] El Amrani Analyse de Fourier p. 239 et p. 246-247