

LEÇON N° 230 : SÉRIES DE NOMBRES RÉELS OU COMPLEXES. COMPORTEMENT DES RESTES OU DES SOMMES PARTIELLES DES SÉRIES NUMÉRIQUES. EXEMPLES.

On considère ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I/ Notion de série numérique. [G] [EA]

On considère ici $(u_n) \in (\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Définition 1 : Série terme général, somme partielle, somme infinie quand convergent et reste d'une série.

Proposition 2 : Si la série converge alors le reste tend vers 0.

Exemple 3 : Séries géométriques avec leurs restes.

Proposition 4 : Critère de Cauchy pour les séries.

Corollaire 5 : Si $\sum u_n$ converge alors $|u_n|$ tend vers 0.

Remarque 6 : La réciproque est fausse pour $u_n = \ln(1 + 1/n)$.

Définition 7 : Séries grossièrement divergentes.

Exemple 8 : $\sum 2^n$ diverge grossièrement.

Proposition 9 : L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$ -ev.

Définition 10 : Séries télescopiques.

Proposition 11 : $\sum (a_n - a_{n-1})$ et $(a_n)_n$ ont même nature.

Application 12 : $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

II/ Séries de terme général positif : cas de convergence. [G] [EA] [FGNAna1]

Proposition 13 : La série de terme général positive converge si et seulement si elle est majorée.

Théorème 14 : Comparaison des séries à terme général positif (inégalité, grand O, équivalent).

Remarque 15 : Ce résultat est faux en général si le terme général n'est pas positif.

Proposition 16 : Série de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Application 17 : Critère $n^\alpha u_n$.

Exemple 18 : $\sum e^{-n^2}$ converge car $n^2 e^{-n^2}$ tend vers 0.

Proposition 19 : Comparaison série intégrale.

Application 20 : Séries de Bertrand : $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Théorème 21 : Sommation des relations de comparaison.

Application 22 : Développement asymptotique de la série harmonique à l'ordre 2.

Développement 1

Application 23 : Développement asymptotique de $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ + application aux cas des fonctions sin et $\ln(1 + \cdot)$.

Application 24 : Développement asymptotique à deux termes de $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Proposition 25 : Règle de d'Alembert/Cauchy et Raab-Duhamel.

Exemple 26 : Exemple d'approximation de e par d'Alembert.

Remarque 27 : La réciproque du critère de Cauchy est fausse.

III/ Séries à terme général quelconque.

A/ converge absolue, semi-convergence. [G] [EA] [FGNAna1]

Définition 28 : Séries absolument convergentes.

Proposition 29 : $\sum |u_n| < +\infty$ alors $\sum u_n < +\infty$.

Contre-exemple 30 : Réciproque fausse.

Définition 31 : Semi-convergence.

Remarque 32 : La sommation des relations de comparaison est toujours valable si une est absolument convergente et l'autre de signe constant.

Théorème 33 : Produit de Cauchy.

Théorème 34 : Théorème d'arrangement de Riemann.

Remarque 35 : Ce théorème permet de mieux comprendre le fameux " $\sum_{n=1}^{+\infty} n = \frac{-1}{12}$ ".

B/ Séries alternées et critère d'Abel. [EA]

Définition 36 : Séries alternées.

Théorème 37 : Critère spécial de Leibniz et majoration somme et reste.

Remarque 38 : La décroissance est essentielle.

Théorème 39 : Critère d'Abel avec transformation d'Abel.

Application 40 : $\sum a_n \cos(n\theta)$ et $\sum a_n \sin(n\theta)$ convergent avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

IV/ Autres techniques de calcul de sommes et de séries.

A/ Séries entières. [EA] [G]

Définition 41 : Séries entières + rayon de converge.

Proposition 42 : CVA dans le disque de converge + CVN.

Remarque 43 : On ne peut pas conclure sur le disque.

Théorème 44 : Théorème d'Abel radial (avec annexe).

Exemple 45 : Calcul de $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

B/ Par les séries de Fourier. [G] [FGNAna2]

Définition 46 : Coefficients de Fourier réels.

Proposition 47 : Lien parité et annulation coefficient de Fourier.

Théorème 48 : Dirichlet.

Théorème 49 : Parseval.

Développement 2

Application 50 : Calcul des $\zeta(2k)$.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 200, p. 236, p. 256
- [EA] El Amrani Suites et séries de fonction p. 79-110, p. 229
- [FGNAna1] Francinou Gianella Nicolas Analyse 1 p. 99-101 et p. 217
- [FGNAna2] Francinou Gianella Nicolas Analyse 2 p. 308