

LEÇON N° 229 : FONCTIONS MONOTONES. FONCTIONS CONVEXES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Dans toute la suite on considérera I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

I/ Fonctions monotones.

A/ Généralités. [RDC]

Définition 1 : Définition fonctions monotones (strict) + ensemble $M^\pm(I)$.

Exemple 2 : $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante. La fonction de répartition d'une variable aléatoire est croissante.

Proposition 3 : Stabilité des fonctions monotones par somme, multiplication par un réel, composition, produit si une des deux est positives, inverse si différent de 0.

Contre-exemple 4 : Le produit en général n'est pas monotone. (Penser à $x \mapsto x$ croissante sur $\mathbb{R}$ mais $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$)

Proposition 5 : Si f monotone, f injective si et seulement si strictement monotone.

B/ Limite et continuité. [RDC] [R] [WA]

Théorème 6 : Limite monotone.

Corollaire 7 : Les fonctions monotones admettent des limites finies à droite et à gauche en tout point.

Théorème 8 : L'ensemble des points de discontinuités d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Exemple 9 : L'application $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ est croissante et possède un nombre infini de points de discontinuités.

Application 10 : La fonction de répartition admet donc un nombre dénombrable de points de discontinuités : cela permet de montrer la convergence en loi discrète.

Proposition 11 : Si f est monotone, f continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire 12 : Homéomorphisme.

Exemple 13 : $\sin$ est un homéomorphisme sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et cela permet de définir Arcsin.

C/ Dérivabilité et monotonie. [R]

Théorème 14 : Rolle.

Théorème 15 : Accroissements finis.

Théorème 16 : Lien entre monotonie et signe dérivée.

Exemple 17 : $t \mapsto t^3$ est strictement croissante.

D/ Théorèmes de Dini. [G]

Théorème 18 : Les deux théorèmes de Dini.

Application 19 : Existence d'une suite de polynômes convergeant uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1, 1]$.

Application 20 : Théorème de Stone-Weierstrass.

E/ Applications. [G]

Proposition 21 : Monotonie des suites réelles récurrentes d'ordre 1.

Proposition 22 : Comparaison série-intégrale.

Application 23 : Développement asymptotique de la série harmonique à l'ordre 2.

II/ Fonctions convexes.

A/ Généralités. [R]

Définition 24 : Fonctions convexes et concaves.

Proposition 25 : f convexe si et seulement si $\text{epi}(f)$ convexe.

Exemple 26 : $x \mapsto e^x$ est convexe et un produit de fonctions convexes n'est a priori pas toujours convexe. (Penser à $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^3$)

Proposition 27 : La composée d'une fonction convexe croissante et une convexe est convexe.

Proposition 28 : Une limite simple de fonctions convexe est convexe.

Théorème 29 : f convexe si et seulement si f convexe sur les milieux.

Proposition 30 : f convexe si et seulement si la fonction pente est croissante.

Application 31 : Les applications affines sont les applications convexes et concaves.

B/ Fonction log-convexe. [R] [FGNAlg3]

Définition 32 : Définition fonction log-convexe.

Proposition 33 : Une fonction log-convexe est convexe.

Développement 1

Exemple 34 : Convexité logarithmique du déterminant.

Application 35 : Ellipsoïde de John-Loewner.

C/ Régularité des fonctions convexes. [R] [OBJ]

Proposition 36 : Continuité à l'intérieur de l'intervalle. (car la fonction y est lipschitzienne)

Théorème 37 : Si f est continue et convexe sur $\overset{\circ}{I}$, f est convexe sur I .

Proposition 38 : Lien entre convexité et croissance dérivée à droite.

Proposition 39 : f convexe si et seulement si f' croissante.

Proposition 40 : f convexe si et seulement si $f'' \geq 0$ (et cas strict).

Exemple 41 : Γ est convexe et même log-convexe.

Théorème 42 : Du théorème de Darboux on peut en déduire qu'une fonction convexe dérivable est continûment dérivable.

Théorème 43 : L'ensemble des extrema d'une fonction convexe est convexe.

Corollaire 44 : Si f est strictement convexe et admet un extremum alors cet extremum est unique.

Proposition 45 : Convexité en dimension supérieure.

D/ Quelques inégalités de convexité. [G] [R]

Application 46 : Inégalité arithmético-géométrique.

Application 47 : Inégalité de Hölder.

Application 48 : Inégalité de Minkowski.

III/ Application aux probabilités. [WA]

Théorème 49 : Inégalité de Jensen.

Application 50 : Inclusion des L^p dans le cadre des convergences L^p .

Définition 51 : Fonction génératrice.

Développement 2

Proposition 52 : Monotonie et convexité fonction génératrice.

Application 53 : Processus de branchement de Galton-Watson.

Références :

- [RDC] Ramis Deschamps Odoux Topologie et éléments d'analyse tome 3 p. 118-124
- [R] Rombaldi Éléments d'analyse réelle p. 164, p. 225-245, p. 251
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 195, p. 397
- [G] Gourdon Analyse p. 94, p. 192, p. 228
- [OBJ] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation p. 26-30
- [FGNAlg3] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 3 p. 229