

Leçon 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications

Références : Rombaldi (Analyse), El Amrani 1, (Zucly - Queffelec et Demailly pour DEV 1)

I - Notion de continuité et de dérivabilité

- 1) Fonctions continues
- 2) Fonctions dérivables

II - Théorèmes principaux

- 1) Théorème des valeurs intermédiaires
- 2) Continuité et compacité
- 3) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis
- 4) Formules de Taylor

III - Étude de certaines classes de fonctions

- 1) Suites de fonctions
- 2) Intégrales à paramètres

DEV 1 : Bernstein et Weierstrass

DEV 2 : Étude de la fonction Γ .

Leçon 228: Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle - Exemples et applications

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

I - Notion de continuité et de dérivabilité

1) Fonctions continues (RAT)

DEF 1: On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ (resp. continue à gauche resp. continue à droite) lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$). On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point $a \in I$.

REM 2: Autrement dit, f est continue en $a \in I$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in I, |x - a| < \eta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

THM 3: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$, alors elle est bornée au voisinage de a .

THM 4: Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mem de points de I qui converge vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

EX 5: Les fonctions constantes sont continues.
• $\forall n \in \mathbb{N}, x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

EX 6: $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'est pas continue en 0. Il suffit de considérer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{1}{n\pi}$.

EX 7: $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $(x + \frac{\sqrt{n}}{n})_{n \in \mathbb{N}}$.

COR 8: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $f(I) \subset I$ et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de I définie par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ qui converge vers un point de continuité de f , alors c'est un point fixe de f .

THM 9: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ est un ouvert (resp. fermé) de I .

THM 10: L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

EX 11: La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle est croissante, continue à droite

THM 12: Soit $a \in I, a \notin \mathbb{I}$. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ a une limite l en a et existe alors un unique prolongement de f à $\mathbb{I} \cup \{a\}$ qui est continue en a : le prolongement est défini par $f(x) - f(x)$ si $x \in \mathbb{I}$ et $f(a) = l$.

EX 13: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, f: x \mapsto x^\alpha \sin(\frac{1}{x^\beta})$ définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

THM 14: Soient f, g continues en $a \in I$. Alors, $|f|, f+g, fg, \min(f, g), \max(f, g)$ sont continues en a .

THM 15: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I, \exists \delta f(I)$ est un intervalle et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

2) Fonctions dérivables (RAT)

DEF 16: On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable (resp. à gauche, à droite) en $a \in I$ lorsque la fonction $\varphi: x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a (resp. à gauche, à droite). Cette limite, notée $f'(a)$ est appelé nombre dérivé de f en a .

REM 17: f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$. Or on a $a_0 = f(a), a_1 = f'(a)$.

PROP 18: Si f est dérivable en $a \in I$, alors, f est continue en a .

REM 19: La réciproque est fautive: $x \mapsto |x|$ en 0.

DEF 20: Si $0 < d \in \mathbb{I} / f'(x)$ existe, on définit la fonction dérivée $f': x \in \mathbb{I} \mapsto f'(x)$.

REM 21: Une fonction peut être continue nulle part dérivable: $\varphi: x \in [-1, 1] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 2-périodique et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \varphi(4^n x)$.

REM 22: La fonction $g: x \mapsto x^2 \mathbb{1}_\mathbb{Q}(x)$ est discontinue partout mais dérivable en 0 (donc continue en 0).

DEF 23: On dit que f est de classe C^1 sur I lorsque elle est dérivable en tout point de I et si la fonction dérivée f' est continue sur I .

REM 24: La fonction $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable

DEF 25: On définit par récurrence les dérivées successives $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f',$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. f est de classe C^n si elle est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue. f est de classe C^∞ si elle est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

THM 26: Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en $a \in I$ et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
 Si $g'(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ et $\frac{1}{g}$ sont dérivables et $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ et $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$.

THM 27 (Leibniz): Soient f, g n fois dérivables sur I . Alors, fg est n fois dérivable sur I et pour tout $x \in I$:
 $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$

THM 28: Soient I, J deux intervalles, $f: I \rightarrow J$ dérivable en a , $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$. Alors, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$.

THM 29: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue bijective dérivable en $a \in I$. Alors, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et seulement si $f'(a) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

THM 30 (Lebesgue, admis): Toute fonction monotone est dérivable presque partout.

II - Théorèmes principaux

1) Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

THM 31: Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f continue sur I réelle, alors $f(I)$ est un intervalle.

REM 32: Si f n'est pas continue en tout point de I , ce n'est pas toujours vrai: $f: x \in [0, 2] \mapsto \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $f(2) = 1$.

THM 32 (TVI): Si $I = [a, b]$, $a < b$ et f est continue sur I , telle que $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a, b[$.

THM 33: Si f est à valeurs réelles définie sur I et vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, elle est alors continue et seulement si pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est fermé dans I .

THM 34: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

REM 35: Une fonction peut donc vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.

2) Continuité et compacité [RPT] [ZQ]

THM 36: Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Toute fonction continue de K dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur K .
 Ex 37: $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

COR 38: Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ périodique de période $T > 0$ à valeurs réelles est uniformément continue.

THM 39: Toute fonction continue sur un compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

REM 40: On peut alors définir $\|f\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et cet espace est complet.

THM 40 (Bernstein): Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour $n \geq 1$, on définit le n -ième polynôme de Bernstein par: $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Alors $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$ et $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq C \omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$ où $C \in \mathbb{R}$ et ω est le module de continuité de f .

COR 41 (Weierstrass): Toute fonction continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

EX 42: Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que: $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 f(x) x^n dx = 0$. Alors $f = 0$.

3) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis (RPT)

THM 43: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

REM 44: Il n'y a pas unicité du point c . L'hypothèse de continuité au bord n'est pas superflue: prenons $f: x \mapsto x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

REM 45: On peut démontrer le théorème de Darboux avec certitude.

THM 44: Sous les mêmes hypothèses que le théorème de Rolle: $\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. (TAP)

THM 45: (IAF) Sous les mêmes hypothèses et si on suppose que f est bornée sur $]a, b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in]a, b[} |f'(x)| |b - a|$

REM 46: Le théorème n'est plus vrai si les fonctions ne sont pas réelles: $x \mapsto e^{ix}$ sur $[0, 2\pi]$.

COR 47: Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$. (resp. à gauche, à droite)

EX 48: La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais pas analytique au voisinage de 0.

4) Formules de Taylor [ROT]

THM 49: Si $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n et n fois dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$

THM 50: (Taylor avec reste intégral) Soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} . Alors: $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt$

THM 51: (Taylor-Young): Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. Si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en a , elle admet alors, au voisinage de a , $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$

EX 52: On peut montrer la convergence de la méthode de Newton avec le THM 49.

III - Étude de certaines classes de fonctions

1) Suites de fonctions [EL AM 1]

THM 53: Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers f sur un voisinage de $a \in I$ et qui sont continues en a . Alors, f est continue en a .

EX 54: $f: x \mapsto x^n$ converge simplement vers $x \mapsto 0$ sur $[0, 1]$ qui n'est pas continue donc la convergence n'est pas uniforme.

THM 55: Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 convergent simplement vers f telle que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers g . Alors, f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

EX 56: $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ C.V. vers $x \mapsto |x|$ qui n'est pas dérivable en 0, pourtant, f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Intégrales à paramètres [LI INT.] [ROT]

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, (M, d) un espace métrique.

THM 57: Soit $f: X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

- pour presque tout $x \in X$, $t \in I \mapsto f(t, x)$ est continue.
- pour tout $t \in I$, $f_t: x \mapsto f(t, x)$ est mesurable.

• $\exists g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable positive telle que:

$$\forall t \in I, |f(t, x)| \leq g(x) \text{ pour presque tout } x \in X$$

Alors $F: t \mapsto \int_X f(t, x) d\mu(x)$ existe pour presque tout $t \in I$ et $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est continue sur X .

THM 58: Soit $f: X \times I \rightarrow \mathbb{R}$, I ouvert telle que

- pour presque tout $x \in X$, $t \in I \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I de dérivée $\partial_2 f(t, x)$
- pour tout $t \in I$, $f_t: x \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur X .
- $\exists g: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour presque tout $x \in X$, pour tout $t \in I$, $|\partial_2 f(t, x)| \leq g(x)$. Alors:

$F: t \in I \mapsto \int_X f(t, x) d\mu(x)$ est dérivable sur I et on a:

$$F'(t) = \int_X \partial_2 f(t, x) d\mu(x)$$

DEV 2

THM 59: On définit $\Gamma: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

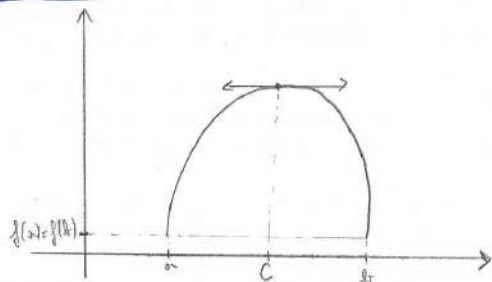
1) Γ est bien définie, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$

2) Γ est convexe et log-convexe

3) $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$ (Euler)

[ROT]

ANNEXE 1: Illustration du théorème de Rolle:



ANNEXE 2: Illustration du théorème des accroissements finis

