

LEÇON N°228 : CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I/ Continuité et dérivabilité.

A/ Continuité des fonctions réelles. [R] [WA]

Définition 1 : Définition continuité et l'ensemble $C^0(I, \mathbb{R})$.

Exemple 2 : Fonctions constantes, polynômes, sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3 : Stabilité de la continuité par valeur absolue, somme, produit, quotient, composée.

Définition 4 : Continuité à droite et à gauche.

Proposition 5 : Continue en a si et seulement si continue à droite et à gauche en a .

Proposition 6 : Caractérisation séquentielle de la continuité

Contre-exemple 7 : La fonction $f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$ est discontinue en 0, la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue sur $\mathbb{R}$.

Application 8 : Si f est continue et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $(u_n)_n$ qui converge vers l alors $f(l) = l$.

Proposition 9 : Caractérisation topologique de la continuité.

Proposition 10 : Prolongement par continuité.

Exemple 11 : Prolongement en 0 de $x \mapsto x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Théorème 12 : Si f est monotone sur I alors l'ensemble de ses points de discontinuités est dénombrable.

Exemple 13 : $f : x \mapsto \frac{1}{\text{Ent}(\frac{1}{x})}$ et $f(0) = 0$ admet un nombre infini de points de discontinuités.

Application 14 : La fonction de répartition admet donc un nombre dénombrable de points de discontinuités : cela permet de montrer la convergence en loi discrète.

Définition 15 : Fonctions lipschitziennes.

Proposition 16 : Les fonctions lipschitziennes sont continues.

Corollaire 17 : Les fonctions convexe sont continues sur l'intérieur d'un segment.

Définition 18 : Uniforme continuité.

Exemple 19 : Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.

Théorème 20 : Théorème de Heine.

Théorème 21 : Théorème des bornes atteintes.

B/ Dérivabilité. [R]

Définition 22 : Fonctions dérivables de classe C^1 , C^m et C^∞ .

Proposition 23 : f dérivable en a si et seulement si admet un DL₁ en a .

Remarque 24 : Faux aux autres ordres car $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL₂ en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Corollaire 25 : Dérivable $\implies$ continue.

Proposition 26 : Toutes les opérations sur les dérivées.

Proposition 27 : Formule de Leibniz.

Proposition 28 : Inversion locale en dimension 1.

II/ Théorèmes fondamentaux des fonctions réelles.

A/ Théorème des valeurs intermédiaires. [R]

Théorème 29 : Si f continue sur I alors $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire 30 : Théorème des valeurs intermédiaires.

Application 31 : $e^{x-3} = \ln(x)$ admet une solution sur $\mathbb{R}$.

Théorème 32 : Théorème de Darboux.

Exemple 33 : Les fonctions en escalier n'ont pas de primitive.

B/ Du théorème de Rolle aux formules de Taylor. [R]

Proposition 34 : Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Théorème 35 : Théorème de Rolle.

Corollaire 36 : Égalité des accroissements finis.

Corollaire 37 : Inégalité des accroissements finis.

Corollaire 38 : Si I intervalle tel que $\forall x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante.

Théorème 39 : Taylor-Lagrange.

Théorème 40 : Taylor avec reste intégral.

Développement 1

Application 41 : Méthode de Laplace.

C/ Densité. [G]

Théorème 42 : Weierstrass.

Application 43 : Si f continue sur I segment et $\int_I x^n f(x) dx = 0$ alors f est nulle.

III/ Passages à la limite des fonctions réelles.

A/ Suites de fonctions. [EA] [WIL]

Théorème 44 : Convergence uniforme conserve la continuité.

Développement 2

Application 45 : Étude de la fonction de Weierstrass, fonction continue partout et nulle part dérivable.

Remarque 46 : Si pas CVU alors on ne garde pas forcément le caractère continue (penser à $x \mapsto x^n$).

Théorème 47 : Dérivation terme à terme des séries de fonctions.

B/ Intégrale à paramètres. [BP] [FGNAna3]

Théorème 48 : Continuité sous signe intégral.

Théorème 49 : Dérivabilité sous signe intégral.

Application 50 : Intégrale de Dirichlet.

Application 51 : La fonction Γ est C^∞ .

Références :

- [R] Rombaldi Éléments d'analyse réelle p. 161, p. 197, p. 251-315
- [EA] El Amrani Suites et séries de fonction p. 196-197
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 339
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 397
- [WIL] Willem Analyse fonctionnelle p. 130
- [BP] Briane Pagès Théorie de l'intégration p. 138
- [FGNAna3] Francinou Gianella Nicolas Analyse 3 p. 214
- [G] Gourdon Analyse p. 224