

LEÇON N° 226 : SUITES VECTORIELLES ET RÉELLES DÉFINIES PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE $u_{n+1} = f(u_n)$. EXEMPLES. APPLICATIONS À LA RÉOLUTION APPROCHÉE D'ÉQUATIONS.

I/ Généralités sur les suites récurrentes.

A/ Suites récurrentes d'ordre h et 1. [G]

Définition 1 : Suites récurrentes d'ordre h .

Remarque 2 : On peut toujours se ramener au cas de l'ordre 1 en prenant $g(x_1, \dots, x_h) = (f(x_1, \dots, x_h), x_1, \dots, x_{h-1})$.

B/ Cas des suites récurrentes réelles d'ordre 1. [EA] [G]

On se place ici avec I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f(I) \subset I$, $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Théorème 3 : Caractérisation séquentielle de la continuité.

Corollaire 4 : Si $u_n \rightarrow l$ et f continue alors $f(l) = l$.

Exemple 5 : La suite u_n définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$ a pour limite potentielle -1 ou 3 .

Proposition 6 : Lien entre monotonie de f et monotonie de la suite $(u_n)_n$.

Exemple 7 : Cas de la suite récurrente $u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$.

C/ Suites récurrentes linéaires à coefficients constants. [G]

Définition 8 : Suites récurrentes linéaires à coefficients constants.

Définition 9 : Polynôme caractéristique associé à une suite récurrente.

Proposition 10 : Expression explicite.

Remarque 11 : Expression explicite des suites récurrentes d'ordre 2.

Exemple 12 : Suite de Fibonacci.

D/ Quelques familles de suites récurrentes. [G]

Exemple 13 : Suite arithmétique.

Exemple 14 : Suite géométrique.

Exemple 15 : Suites homographiques.

II/ Points fixes et suites récurrentes.

A/ Théorème du point fixe. [G] [PGCD]

Théorème 16 : Théorème de point fixe de Banach-Picard. (préciser la suite récurrente apparaissant dans la preuve)

Contre-exemple 17 : L'hypothèse $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ ne suffit pas pour l'existence : $f(x) = x + \frac{1}{x}$ n'admet pas de point fixe.

Corollaire 18 : Si f^r est k -contractante avec $0 < k < 1$ alors f admet un unique point fixe.

Définition 19 : Point fixe attractif et répulsif.

Proposition 20 : Attractivité, superattraction, répulsion.

Exemple 21 : Utilisation des suites récurrentes pour approcher le nombre d'or.

B/ Application en théorie des équations différentielles linéaires. [BERT]

Application 22 : Théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas globalement lipschitzien.

Remarque 23 : On effectue un changement de norme pour rendre une application contractante.

C/ Application en algèbre linéaire. [G]

Lemme 24 : Déterminant circulant.

Proposition 25 : Suite de polygone.

D/ Application en probabilité. [WA]

Définition 26 : Fonction génératrice.

Développement 1

Théorème 27 : Processus de branchement de Galton-Watson.

E/ Développements asymptotiques de suites récurrentes. [FGNA1]

Développement 2

Exemple 28 : Développement asymptotique de $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ + application aux cas des fonctions $\sin$ et $\ln(1 + \cdot)$.

Exemple 29 : Développement asymptotique à deux termes de $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

III/ Méthodes de résolutions d'équations.

A/ Trouver les zéros d'une fonction. [PGCD]

Théorème 30 : Méthode de Newton.

Application 31 : Méthode de Héron.

Application 32 : En couplant la méthode de Newton avec la dichotomie on peut trouver des approximations des racines d'un polynôme.

B/ Méthodes itératives pour la résolution d'un système linéaire. [ALL]

Définition 33 : Méthode itérative convergente.

Proposition 34 : Convergence des méthodes itératives.

Définition 35 : Matrice à diagonale strictement dominante.

Proposition 36 : Pour les matrices à diagonale strictement dominante, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.

C/ Approximation de valeurs et vecteurs propres. [ALL]

Proposition 37 : Convergence de la méthode de la puissance itérée.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 21, p. 23 et p. 192
- [EA] El Amrani Suites et séries de fonction p. 38-47
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 139
- [BERT] Berthelin Équations différentielles p. 85
- [FGNA1] Francinou Gianella Nicolas Analyse 1 p. 99-101
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 438
- [ALL] Allaire Analyse numérique et optimisation p. 428 et p. 440