

LEÇON N° 223 : SUITES NUMÉRIQUES. CONVERGENCE, VALEURS D'ADHÉRENCE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

I/ Convergence des suites numériques.

A/ Limites. [EA] [R]

Définition 1 : Définition suite convergente et divergente.

Exemple 2 : $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 1, $u_n = n$ DV et cas des suites arithmétiques et géométriques.

Théorème 3 : Unicité de la limite.

Proposition 4 : Toute suite numérique convergente est bornée.

Proposition 5 : Linéarité de la limite.

Proposition 6 : Caractérisation séquentielle de la continuité.

Définition 7 : Suites de Cauchy.

Proposition 8 : Toute suite converge est de Cauchy, toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition 9 : Toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

B/ Valeurs d'adhérences. [EA] [G]

Définition 10 : Sous-suite convergente.

Proposition 11 : Si $u_n \rightarrow l$ alors toute sous-suite converge vers l .

Définition 12 : Valeurs d'adhérences.

Proposition 13 : Si u_n converge elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Exemple 14 : $(-1)^n$ a deux valeurs d'adhérence 1 et -1.

Proposition 15 : L'ensemble des valeurs d'adhérences est un fermé qui est :
 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{u_k, k \geq n\}$

Exemple 16 : $(\sin(n))_n$ et $(\cos(n))_n$ ont pour ensemble de valeur d'adhérence $[-1, 1]$.

C/ Cas des suites réelles. [EA] [WA]

Lemme 17 : Conservation des inégalités larges.

Théorème 18 : Théorème des gendarmes.

Proposition 19 : Limite infinie et inégalité.

Théorème 20 : Limite monotone.

Exemple 21 : L'intégrale de Wallis : $(I_n)_n$ converge car est croissante majorée.

Définition 22 : Suites adjacentes.

Proposition 23 : Convergence des suites adjacentes.

Application 24 : $H_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Lemme 25 : Toute suite réelle admet une sous-suite monotone.

Théorème 26 : Bolzano-Weierstrass.

Corollaire 27 : Une suite converge si et seulement si elle est bornée et n'admet qu'une unique valeur d'adhérence.

Définition 28 : Limite sup et inf.

Remarque 29 : C'est utile en pratique car ces limites sont toujours définies.

Proposition 30 : La limite inf est la plus petite valeur d'adhérence et la limite sup est la plus grande.

Théorème 31 : (u_n) converge si et seulement si $\limsup u_n = \liminf u_n$.

Application 32 : $X_n \rightarrow X$ en loi si et seulement si F_{X_n} CVS vers F_X en tout point de continuité de F_X .

II/ Suites particulières.

A/ Séries de nombre réels et complexes, comparaison. [G]

Définition 33 : Série.

Exemple 34 : Cas de la série géométrique.

Proposition 35 : Si $(u_n)_n$ est positive alors $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) majorée.

Exemple 36 : Séries de Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 37 : Sommation des relations d'équivalents.

Application 38 : Développement asymptotique à l'ordre 2 de la série harmonique.

B/ Suites définies par une relation de récurrence. [R] [FGNAna1]

Théorème 39 : Théorème de Césaro.

Développement 1

Application 40 : Développement asymptotique de $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ + application aux cas des fonctions $\sin$ et $\ln(1 + \cdot)$.

Application 41 : Développement asymptotique à deux termes de $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

III/ Approximation de réels. [R] [PGCD]

Proposition 42 : Suite adjacentes d'éléments de $\mathbb{Q}$ tendant vers un réel fixé.

Développement 2

Théorème 43 : Méthode de Newton

Application 44 : Méthode de Héron.

Théorème 45 : Les sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ sont soit denses soit fermés du type $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Application 46 : L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{in})_n$ est le cercle unité.

Références :

- [EA] El Amrani Suites et séries de fonctions p. 1-38
- [G] Gourdon Analyse p. 19, p. 191-200
- [R] Rombaldi Éléments d'analyse réelle p. 99, p. 114 et p. 165
- [FGNAna1] Francinou Gianella Nicolas Analyse 1 p. 99-103
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 142
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 411