

Léçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Application à la résolution approchée d'équations.

Ouvrages: Gourdon, El Amrani 1, Demailly, Rouvière, Allaire (ana num et opti)

I - Suites récurrentes

1) Définitions et premières propriétés

2) Exemples classiques de suites récurrentes

a) Suites arithmético-géométriques

b) Suites homographiques

c) Récurrence linéaire à coefficients constants

II - Points fixes

1) Le théorème du point fixe

2) Classification des points fixes

III - Application à la résolution approchée d'équations de type $f(x) = 0$

1) Méthode Newton

a) Dans $\mathbb{R}$

b) Dans $\mathbb{R}^m$

2) Méthode de la sécante

3) Méthode de la puissance

IV - Systèmes linéaires et équations différentielles

1) Méthodes itératives pour les systèmes linéaires

2) Méthode d'Euler explicite

DEV 1: Étude la suite des Archen itérés

DEV 2: Méthode de Newton

Théorème 2.26: Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(n, u_n)$. Exemples. Application à la résolution approchée d'équations.

On considère $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Suites récurrentes

1) Définitions et premières propriétés

[GOU]

DEF 1: Soit $h \in \mathbb{N}^*$. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre h lorsqu'on peut écrire:

$$\forall n \geq h, u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-h}).$$

PROP 2: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite récurrente d'ordre $h \in \mathbb{N}^*$ vérifiant: $\forall n \geq h, u_n = f(u_{n-1}, \dots, u_{n-h})$ où $f: E^h \rightarrow E$ est une application continue. Si (u_n) converge vers $l \in E$, alors $l = f(l, \dots, l)$.

EX 3: Soit (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$. Si (u_n) converge, sa limite est -1 ou 3 .

PROP 4: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si f est croissante, (u_n) est monotone dont le sens est donné par le signe de $u_1 - u_0$.
- Si f est décroissante, $f \circ f$ est croissante, donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et leur sens de monotonie est opposé.

EX 5: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n} \end{cases}$. Alors (u_n) est croissante et (u_{2n}) est décroissante. $\rightarrow$ voir ANNEXE 1.

DEF 6: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u_n \rightarrow 0$.

- On dit que (u_n) converge géométriquement vers 0 lorsqu'il existe $k \in]0, 1[$, $u_n = O(k^n)$.
- On dit que (u_n) converge lentement vers 0 lorsqu'il existe $A > 0$, $\alpha > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \frac{A}{n^\alpha}$.
- On dit que (u_n) converge quadratiquement vers 0 lorsque $u_0 \in \mathbb{R}^+$.

EX 7: $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Alors u_n tend vers 0 et $u_n \sim \frac{1}{n}$ donc la convergence est lente.

2) Exemples classiques de suites récurrentes

a) Suites arithmético-géométriques

[GOU]

DEF 8: Soient $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^*$, $q \in \mathbb{R}^*$, on dit que (u_n) est arithmético-géométrique (resp. géométrique) de raison r (resp. q) et de premier terme a lorsque $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ (resp. $u_{n+1} = qu_n$).

PROP 9: Si (u_n) est arithmético-géométrique de raison r , $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Si (u_n) est géométrique de raison q , $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

DEF 10: Soient $a \neq 0$ et b deux complexes, (u_n) est dite arithmético-géométrique lorsque $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$.

PROP 11: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \begin{cases} u_0 a^n + b \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ u_0 + nb & \text{si } a = 1 \end{cases}$.

b) Suites homogènes

[GOU]

DEF 12: Une suite (u_n) est dite à récurrence homogène lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence du type:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n) \text{ avec } h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, ad-bc \neq 0.$$

PROP 13: Soit $P(x) = cx^2 - (a+d)x - b \in \mathbb{R}[X]$.

- Si P admet deux racines distinctes α, β , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \text{ où } k = \frac{\alpha - d}{\beta - d}.$$

- Si P admet une racine double α , alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \text{ où } k = \frac{c}{a - \alpha c}.$$

c) Récurrence linéaire à coefficients constants

[GOU]

DEF 14: Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre h lorsque pour tout $n \geq h$, $u_n = \sum_{i=1}^h a_i u_{n-i}$ avec $a_1, \dots, a_h \in \mathbb{R}$.

PROP 15: Soit $P(x) = x^h - \sum_{i=1}^h a_i x^{h-i}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ ses racines de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_q$. Alors $\{u_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n = \sum_{i=1}^q a_i u_{n-i}\} = \{P_1(n)\alpha_1^n + \dots + P_q(n)\alpha_q^n \mid \text{si pour tout } i, \deg(P_i) \leq \alpha_i - 1\}$.

PROP 16: Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0, u_1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$ et $P(x) = x^2 - ax - b$.

- Si P admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2 , alors $u_n = \lambda_1^n \mu_1 + \lambda_2^n \mu_2$.
- Si P possède une racine double λ , $u_n = (\lambda n + \mu) \lambda^n$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont déterminés grâce à u_0 .

A continuer
en annexe

[ELAM]

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

REM 17: On regarde la relation $u_{n+1} = au_n + v_n$ par la relation $X_{n+1} = AX_n$ avec $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ et on a $X_n = A^n X_0$.

EX 18: Avec $u_{n+2} = au_{n+1} + v_{n+1}$ on a $X_{n+2} = AX_{n+1}$ ou $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$, on peut réduire A pour calculer A^n .

EX 19: La suite de Fibonacci: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On définit explicitement par $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$.

II - Points fixes

1) Le théorème du point fixe (DEF II) (GOV)

DEF 20: Soit (E, d) un espace métrique et $\varphi: E \rightarrow E$. On dit que φ est contractante lorsqu'il existe $k < 1$ tel que pour tous $x, y \in E$, $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq k d(x, y)$.

THM 21: On suppose (E, d) complet et $\varphi: E \rightarrow E$ contractante. Alors: $\exists! a \in E$, $\varphi(a) = a$. De plus, pour tout premier terme $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a .

REM 22: La convergence est exponentiellement rapide car $d(x_n, a) \leq k^n d(x_0, a)$.

APPLI 23: Cela permet de résoudre des équations du type $f(x) = 0$, f différentiable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et f strictement croissante, en posant $\varphi(x) = x - C f(x)$, $C > 0$.

REM 24: Toutes les hypothèses sont importantes:
 • $x \in]0, 1[$: $\frac{x}{2}$ est contractante mais n'a aucun point fixe.
 • $x \mapsto \sqrt{x}$ est sans point fixe mais $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < |x - y|$.

2) Classification des points fixes (ROV)

On veut étudier le comportement itératif d'une fonction au voisinage de ses points fixes. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in I$ un point fixe de f .

PROP 25: Si $|f'(a)| < 1$, il existe un intervalle fermé $J \subset I$ centré en a , stable par f , alors la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in J$ converge géométriquement vers a .

• Si $f'(a) = 0$ et f'' ne s'annule pas sur J , si $x_0 \neq a$, $x_0 \in J$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$ et $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2} (x_n - a)^2$, a est un point fixe superattractif.
 • Si $|f'(a)| > 1$, il existe $J \subset I$ intervalle fermé centré en a tel que pour $x_0 \in J$, $x_0 \neq a$, (x_n) sort de J . On dit que a est répulsif.

EX 26: Le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le point fixe de $x \mapsto 1+x$ sur $J = [0, 1]$ stable. $\forall x \in J$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ d'où a est attractif.

EX 27: Étude de la suite définie par $f_0 \in]0, 1[$, $u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{6}}{80} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$).

III - Application à la résolution approchée d'équations de type $f(x) = 0$

1) Méthode de Newton (ROV)

a) Dans $\mathbb{R}$

Soit $c < d$, on considère $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n)$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

THM 28: Avec le cadre précédent, il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ soit stable par F et pour tout $x_0 \in I$, (x_n) converge de manière quadratique vers a l'unique zéro de f . Si de plus, pour tout $x \in [c, d]$, $f''(x) > 0$, $[c, d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, (x_n) est strictement décroissante et $\exists C > 0$ tel que $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et $x_n - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$.

REM 29: On peut ainsi obtenir des valeurs approchées de $\sqrt{y}$ pour $y \in \mathbb{R}^+$ par exemple.

b) Dans $\mathbb{R}^n$ (Newton-Raphson) (DEF)

La méthode de Newton se généralise en dimension n .

THM 30: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit a une solution du système $f(x) = 0$. Si $df(a) \in GL(n, \mathbb{R})$ est inversible, alors a est un point fixe superattractif de $\varphi: x \mapsto x - df(x)^{-1} f(x)$ et donc la suite définie par $x_0 \in \Omega$ (proche de a) et $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers a .

2) Méthode de la sécante (DEF)

Dans certaines situations, la dérivée f' est compliquée ou impossible à expliciter. L'idée est de remplacer f' par le taux d'accroissement de f sur un petit intervalle. Soit $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, x_0, x_1 deux valeurs approchées de la racine a de l'équation $f(x) = 0$.

$$\text{On pose } T_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

L'équation de la sécante traversant le graphe de f aux points d'abscisse x_1 et x_2 est $y = T_1(x-x_1) + f(x_1)$. On obtient une nouvelle approximation x_3 de a en calculant l'abscisse de l'intersection de la sécante avec l'axe Ox : $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{T_1}$.

On itère le procédé, en posant $T_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ et $x_{p+1} = x_p - \frac{f(x_p)}{T_p}$.

THM 31: On suppose f de classe C^2 et de dérivée $f' \neq 0$ sur $I = [a-h; a+h]$. Soit (x_p) la suite de Fibonacci. Alors, il existe $K > 0$, pour tous $x_0, x_1 \in [a-h; a+h], x_0 \neq x_1$, $|x_p - a| \leq \frac{1}{K} [K \max(|x_0 - a|, |x_1 - a|)]^{F_p}$.

REM 32: Comme $x_p \sim \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{F_p}$, la convergence est au moins aussi rapide que la méthode de Newton (qui est localement quadratique en 2°). $\rightarrow$ Amélioration et optim.

3) Méthode de la puissance [ALLAIRE]
C'est une méthode pour calculer la plus petite ou la plus grande valeur propre (en module) d'une matrice et un vecteur propre associé. Une limitation est que la valeur propre extrême que l'on calcule doit être simple.

DEF 33: Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres avec $\lambda_n > |\lambda_i|$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$. On applique l'algorithme ci-dessous avec $\varepsilon > 0$ (petit).

- Initialisation: $x_0 \in \mathbb{R}^n, \|x_0\| = 1$
- Itérations: Tant que $\|x_k - x_{k-1}\| > \varepsilon$:
 - $y_k = A x_{k-1}$
 - $x_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$

Si $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ est petit, alors x_k est un vecteur propre de A de valeur propre approchée $\|y_k\|$ car $A x_k = \|y_k\| x_k = A x_{k-1}$.

PROP 34: Sous les mêmes hypothèses, on suppose aussi que $(e_1, \dots, e_n)$ est une B.O.N de vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On suppose que λ_n est simple, positive et que x_0 n'est pas orthogonal à e_n . Alors, la méthode de la puissance converge: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k\| = \lambda_n$; $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ avec $x_0 = \pm e_n$. La convergence est géométrique: $\|y_k\| - \lambda_n = O\left(\left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^k\right)$ et $\|x_k - x_0\| = O\left(\left|\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right|^k\right)$.

REM 35: La convergence de la suite de valeurs propres approchées $\|y_k\|$ est plus rapide que celle des vecteurs propres approchés x_k . Pour la plus petite valeur propre, on modifie seulement $y_k = A x_{k-1}$ en $A y_k = x_{k-1}$ qui en dépend de résoudre.

II - Systèmes linéaires et équations différentielles [ALL]

1) Méthodes itératives pour les systèmes linéaires
Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On considère la décomposition $A = M - N$ avec $M \in GL_n(\mathbb{R})$ (facile à inverser --). La méthode itérative basée sur cette décomposition est:

$\begin{cases} x_k \in \mathbb{R}^n \\ M x_{k+1} = N x_k + b, \forall k \geq 1 \end{cases}$ où le système à résoudre est $A x = b$.

REM 39: Si $x_k \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$, alors $(M - N)x = Ax = b$ en passant à la limite.

DEF 38: On dit qu'une méthode itérative converge lorsque quel que soit le choix du vecteur initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite de solutions approchées x_k converge vers la solution exacte x .

DEF 39: On définit le rayon de convergence de A par $\rho(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

PROP 40: La méthode précédente converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

REM 41: Suivant la décomposition (M, N) , les méthodes portent différents noms:

Méthode	M	N	
Jacobi	D	D = A	$\omega \in \mathbb{R}^+$
Gauss-Seidel	D - E	E	
Relaxation	D - E	ωE	
	$\frac{1}{\omega} D$	$\frac{1}{\omega} D + F$	$\alpha \neq 0$
	$\frac{1}{\omega} Id$	$(\frac{1}{\omega} Id - A)$	

2) Méthode d'Euler explicite
On s'intéresse de Cauchy $y' = f(t, y)$ avec $f: [t_0; t_0+T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ suffisamment régulière.

On subdivise $[t_0; t_0+T]$ en $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0+T$. On note $h_n = t_{n+1} - t_n$ pour $0 \leq n \leq N-1$ et on cherche des valeurs approchées $y_0, \dots, y_N$ des valeurs $y(t_n)$ proches de la solution exacte y .

DEF 42: On définit le schéma d'Euler explicite en confondant la courbe intégrale sur $[t_n; t_{n+1}]$ avec sa tangente au point (t_n, y_n) . On définit y_n par récurrence: $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n)$, $t_{n+1} = t_n + h_n$, $0 \leq n \leq N-1$.

ANNEXE

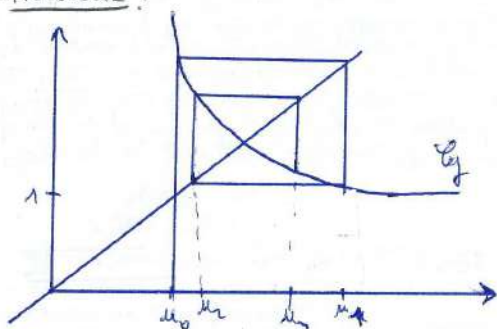


Figure 1: Représentation graphique de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n} \end{cases}$.

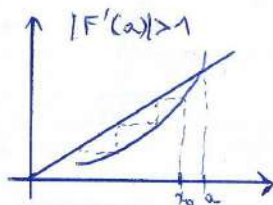
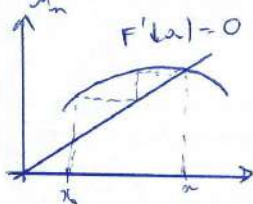
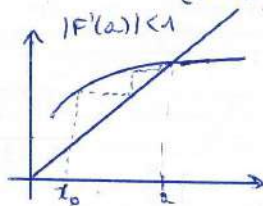


Figure 2: Classification des points fixes

- $|F'(a)| < 1$: attractif
- $F'(a) = 0$: superattractif
- $|F'(a)| > 1$: répulsif.

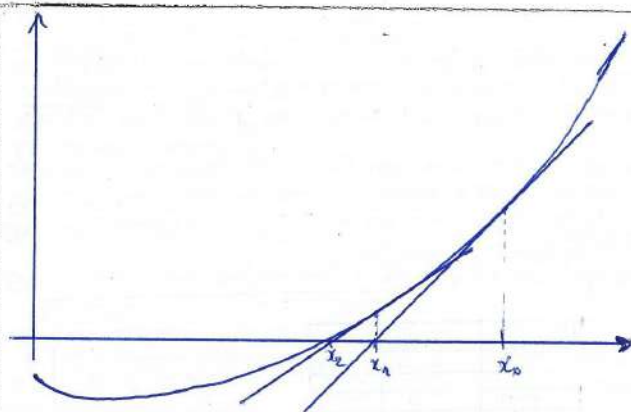


Figure 3: Illustration de la méthode de Newton