

LEÇON N° 221 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I/ Théorie des équations différentielles linéaires.

A/ Premières définitions. [G]

Définition 1 : Équations différentielles d'ordre p et équations différentielles homogènes.

Remarque 2 : On peut toujours se ramener aux cas $p = 1$ avec une matrice compagnon.

Remarque 3 : Si les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ on parle de système d'équations différentielles linéaires et on se ramène au cas $p = 1$ comme avant.

Notation 4 : On note S_H l'ensemble des solutions homogènes et S l'ensemble des solutions.

B/ Théorème de Cauchy linéaire : structure des solutions. [G]

Théorème 5 : Théorème de Cauchy linéaire.

Remarque 6 : Réécriture pour les équations différentielles d'ordre n .

Exemple 7 : Il existe une unique solution à $y' + y = \sin(t)$ avec $y(0) = 1$.

Application 8 : Si on trace les différentes solutions avec conditions initiales différentes, elle ne se croisent pas par unicité du théorème de Cauchy.

Contre-exemple 9 : L'hypothèse de linéarité est nécessaire pour l'unicité par exemple $y' = y^{1/2}$ et $y(0) = 0$ on a deux solutions : $y(t) = 0$ et $y(t) = \frac{t^2}{4}$.

Proposition 10 : S_H est un sev de dimension n . S est un espace affine de dimension n et de direction S_H .

Remarque 11 : On a donc $S = \{Y + Y_0, Y \in S_H\}$ où Y_0 est une solutions particulière.

C/ Notion de wronskien. [G] [BERT]

Définition 12 : Wronskien.

Remarque 13 : Expression du Wronskien lorsque l'on a p solutions.

Proposition 14 : Le rang des solutions à t fixé est indépendant de t .

Proposition 15 : $Y_1, \dots, Y_p$ solutions indépendantes si et seulement si $\exists t_0$ tel que $w(t_0) \neq 0$ si et seulement si $\forall t, w(t) \neq 0$.

Proposition 16 : Identité d'Abel : $w'(t) = \text{Tr}(A(t))W(t)$

Application 17 : $\forall t \in \mathbb{R}, \det(e^{tA}) = e^{t\text{Tr}(A)}$.

D/ Stabilité de solutions. [PGCD]

Définition 18 : Solutions stables et asymptotiquement stables.

Développement 1

Théorème 19 : Théorème de Liapounov.

II/ Résolutions explicites.

A/ Résolution d'équations homogènes. [BERT]

Définition 20 : Polynôme caractéristique associé à une EDL à coefficients constants.

Proposition 21 : Résolution de $Y' = AY$: la solution est de la forme $Y(t) = e^{tA}Y_0$.

Remarque 22 : Demande de calculer l'exponentielle de matrice qui n'est pas toujours simple, la réduction aide.

Lemme 23 : Lemme des noyaux.

Théorème 24 : Expression explicite dans le cas constant des équations différentielles autonomes.

Exemple 25 : Cas de l'ordre 2 à coefficients constants.

Application 26 : Résolution de l'équation différentielle associée à l'oscillateur harmonique sans frottements.

B/ Recherche de solutions particulières. [G] [BERT]

Méthode 27 : Méthode de variation des constantes.

Corollaire 28 : Formule de Duhamel en dimension 1.

Application 29 : Transformée de Fourier d'une gaussienne.

Exemple 30 : Solutions du premier exemple donné.

C/ Solutions développables en série entière. [BERT] [FGNAna4]

Développement 2

Exemple 31 : Résolution de l'équation de Bessel grâce aux séries entières.

III/ Étude qualitative en dimension 2.

A/ Localisation des zéros. [BERT]

Théorème 32 : Théorème de localisation de Sturm.

Exemple 33 : $y'' + y = 0$ s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$. (en effet puisque la résolution explicite est $\cos$)

Exemple 34 : $y'' + ty$ s'annule une fois sur $] -\infty, 0[$ et une infinité de fois sur $]0, +\infty[$.

B/ Portrait de phase d'équations autonomes. [BERT]

Application 35 : Tracer les trajectoires dans le cas $Y' = AY$ en dimension 2 avec les portraits de phase en annexe.

Références :

- [BERT] Berthelin Équations différentielles p. 14-212
- [G] Gourdon Analyse p. 353 et p. 357
- [FGNAna4] Francinou Gianella Nicolas Analyse 4 p. 101
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 129