

LEÇON N° 220 : ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

I/ Théorèmes fondamentaux de la théorie des EDOs.

A/ Théorème de Cauchy-Lipschitz. [G] [BERT]

Définition 1 : Solutions globales et maximales.

Théorème 2 : Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Remarque 3 : On peut passer d'une équation différentielle d'ordre n à une équation différentielle d'ordre 1

Proposition 4 : $C^1 \implies$ localement lipschitzien.

Application 5 : $y' = t^2 e^y$ et $y(0) = y_0$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

Exemple 6 : $y'' + (y')^2 \sin(ty) = 0$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$.

B/ Prolongement des solutions. [BERT]

Théorème 7 : Théorème de sortie de tout compact.

Corollaire 8 : Théorème des bouts.

Exemple 9 : $y' = y^2$ et $x' = -x$ avec $y' = -y$.

Lemme 10 : Lemme de Grönwall intégral.

Application 11 : Si f continue, localement lipschitzienne et bornée alors la solution est globale.

II/ Méthodes de résolution explicite, étude quantitative.

A/ Résolution des EDO linéaires. [G]

Théorème 12 : Théorème de Cauchy linéaire.

Méthode 13 : Méthode de variation de la constante.

Application 14 : Formule de Duhamel si A est constante.

Théorème 15 : Solutions explicites d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n .

B/ Résolution en se ramenant à une EDL. [G]

Exemple 16 : Équation différentielle de Bernoulli.

Application 17 : Résoudre $y' - ty^3 + ty = 0$.

Exemple 18 : Équation de Riccati.

C/ Utilisation des séries entières. [BERT] [FGNAna4]

Exemple 19 : Résolution de $(t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0$.

Développement 1

Exemple 20 : Résolution de l'équation de Bessel grâce aux séries entières.

D/ Équations à variables séparables.

Définition 21 : Équations à variables séparables.

Exemple 22 : Résolution de $t \ln(t)y' - y - 1 = 0$.

III/ Étude qualitative des solutions.

A/ Champs de vecteurs, isoclines et points stationnaires. [BERT]

Définition 23 : Équation autonome et trajectoires.

Définition 24 : Isoclines.

Exemple 25 : Système et orientation par quadrant : permet d'avoir des informations sur le portrait de phase et la forme des solutions.

Définition 26 : Courbe intégrale et portrait de phase.

Exemple 27 : Système de Lotka-Volterra.

Exemple 28 : Équation du pendule.

Application 29 : Présentation du cas des équations autonomes d'ordre 2 : portraits de phase de $Y' = AY$ selon les propriétés de diagonalisation de la matrice A .

B/ Stabilité des solutions. [PGCD] [BERT]

Définition 30 : Solutions stables et asymptotiquement stables.

Développement 2

Théorème 31 : Théorème de Liapounov.

Références :

- [BERT] Berthelin Équations différentielles p. 14-212
- [G] Gourdon Analyse p. 353-374
- [FGNAna4] Francinou Gianella Nicolas Analyse 4 p. 101
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 129