

LEÇON N° 219 : EXTREMA : EXISTENCE, CARACTÉRISATION, RECHERCHE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soit X un $\mathbb{R}$ -evn et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

I/ Existence et unicité d'extrema.

A/ Premières définitions. [PGCD]

Définition 1 : Maximum/minimum local/global.

Remarque 2 : Un extremum global est local et l'inverse est faux avec $x \mapsto (x - 2)x(x + 2)$ (la fonction possède deux extrema locaux qui ne sont pas globaux).

B/ Compacité. [G]

Théorème 3 : Théorème des bornes atteintes.

Application 4 : Théorème de point fixe dans un compact : si K compact et $f : K \rightarrow K$ continue telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ alors f admet un unique point fixe.

Application 5 : Si K_1 et K_2 sont des compacts alors $\exists x_1, x_2$ tels que $d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2)$.

Proposition 6 : Si f continue coercive de X evn fermé non borné en dimension finie dans $\mathbb{R}$ admet un minimum.

Application 7 : Si F fermé et K compact, $d(F, K)$ est atteinte.

C/ Convexité. [OBJ] [FGNAlg3]

Définition 8 : Ensembles, fonctions convexes et fonctions strictement convexes.

Exemple 9 : La norme est strictement convexe.

Théorème 10 : Caractérisations de la convexité.

Application 11 : $A \in S_n(\mathbb{R})$, $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe si et seulement si A positive.

Proposition 12 : L'ensemble des extrema d'une fonction convexe est un convexe, si f strictement convexe et admet un minimum alors f a un unique extremum.

Application 13 : Ellipsoïde de John-Loewner.

Exemple 14 : L'existence d'un point minimum pour une fonction strictement convexe n'est pas vrai en général (considérer exp).

D/ Espaces de Hilbert. [HL]

Développement 1.a)

Théorème 15 : Théorème de projection sur un convexe fermé.

Corollaire 16 : p_F est continue, linéaire, 1-lipschitzienne.

Corollaire 17 : Si $C = F$ sev fermé alors $H = F \oplus F^\perp$.

Application 18 : Existence de l'espérance conditionnelle en probabilité.

Développement 1.b)

Théorème 19 : Théorème de représentation de Riesz.

Application 20 : Existence des adjoints dans un Hilbert.

E/ Cas des fonctions holomorphes. [T] [OBJ]

Théorème 21 : Formule de Cauchy.

Corollaire 22 : Propriété de la moyenne.

Proposition 23 : Inégalités de Cauchy.

Corollaire 24 : Théorème de Liouville.

Application 25 : Théorème de d'Alembert-Gauss.

Proposition 26 : Principe du maximum local.

Corollaire 27 : Principe du minimum local.

Proposition 28 : Principe du maximum global.

Application 29 : Lemme de Schwarz sur les automorphismes du disque unité.

II/ Extrema et calcul différentiel.

A/ Propriétés du premier ordre. [R][PGCD]

Définition 30 : Point critique.

Théorème 31 : Si f admet un extremum local en a alors $d_a f = 0$.

Remarque 32 : La réciproque est fausse avec $x \mapsto x^3$ (la dérivée s'annule en 0 mais 0 n'est pas un extremum local).

Théorème 33 : Rolle.

Corollaire 34 : Inégalité des accroissements finis.

B/ Conditions du second ordre. [PGCD]

Théorème 35 : CN et CS d'existence d'extrema avec des conditions sur la hessienne.

Exemple 36 : Le cas de la dimension 2.

Exemple 37 : Pour le dernier cas considérer les trois fonctions $f(x, y) = x^4$, $f(x, y) = -x^4$ et $f(x, y) = x^4 - y^4$.

C/ Optimisation sous contrainte. [PGCD] [OBJ]

Théorème 38 : Théorème des extrema liés.

Développement 2

Proposition 39 : Différentielle du déterminant : Si $M, H \in M_n(\mathbb{R})$, alors $d_M(\det)(H) = \text{Tr}({}^t\text{Com}(M)H)$.

Application 40 : $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme 2 minimale.

Application 41 : Diagonalisation des endomorphismes symétriques.

III/ Optimisation numérique.

A/ Newton. [PGCD]

Théorème 42 : Méthode de Newton.

Application 43 : Méthode de Héron.

Application 44 : En combinant la méthode de Newton avec la dichotomie on peut approximer les racines d'un polynôme.

B/ Moindres carrés : régression linéaire.

Proposition 45 : Coefficient directeur et ordonnée à l'origine de la droite d'ajustement.

Références :

- [R] Rombaldi Éléments d'analyse réelle p. 251 et p. 258
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 142 et p. 360-364
- [OBJ] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation p.20, p. 26-30 et p. 72
- [G] Gourdon Analyse p. 31-34
- [HL] Hirsch-Lacombe Éléments d'analyse fonctionnelle p. 91-96
- [FGNAlg3] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 3 p. 229
- [T] Tauvel Analyse complexe pour la Licence 3 p. 84-87