Leçon n° 218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

I/ Approximation locale : Formule de Taylor-Young. [R] [PGCD]

Théorème 1 : Théorème de Taylor-Young.

Théorème 2 : Théorème de Taylor-Young en dimensions supérieures.

Définition 3 : Développements limités.

Proposition 4 : Unicité du développement.

Application 5 : $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \iff [A,B] = 0$.

Proposition 6 : Si f n-fois dérivable alors f admet un DL à l'ordre n.

Proposition 7 : Si $n = 1$ la réciproque est vraie : f dérivable en $a \iff$ DL à l'ordre 1 en a.

Contre-exemple 8 : Faux pour $n > 1$ avec $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ qui admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exemple 9 : DL usuels et $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$.

Application 10 : Les développements limités permettent de lever des formes indéterminées pour calculer des limites.

II/ Approximation globale.

A/ Formule de Taylor-Lagrange. [R]

Théorème 11 : Taylor-Lagrange.

Corollaire 12 : Inégalité de Taylor-Lagrange.

Remarque 13 : Pour $n = 0$ on retrouve l'inégalité des accroissements finis.

B/ Formule de Taylor avec reste intégral. [R] [OBJ]

Proposition 14 : Taylor avec reste intégral.

Remarque 15 : Avec plus de régularité on a donc plus d'informations sur le reste de la formule de Taylor-Young.

Proposition 16 : Reste-intégral en dimension supérieur.

Application 17 : Lemme de Hadamard.

C/ Application : Développement en série entière. [EA] [R]

Définition 18 : DSE au voisinage de x_0.

Proposition 19 : Si f DSE en $x_0 \implies C^\infty$ au voisinage de x_0 + le DSE est donné par la formule de Taylor.

Application 20 : Application de la formule de Taylor-Lagrange : Critère pour être DSE en majorant la dernière dérivée.

Application 21 : Application de la formule de Taylor avec reste intégral : DSE de e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $(1+x)^\alpha$.

Théorème 22 : Bernstein.

Théorème 23 : Inégalité de Kolmogorov.

III/ Applications des formules de Taylor.

A/ Recherche d'extrema. [PGCD]

Définition 24 : Minimum et maximum local.

Définition 25 : Point critique.

Proposition 26 : CN et CS pour avoir un extremum local.

Exemple 27 : $f(x,y) = x^2 + y^4$ a un minimum global en 0 strict.

B/ Applications en analyse numérique. [PGCD] [DEM]

Proposition 28 : Méthode de Newton.

Application 29 : Méthode de Héron.

Proposition 30 : Schéma d'Euler explicite pour les équations différentielles.

C/ Étude asymptotique d'intégrales. [PGCD]

Développement 1

Proposition 31 : Méthode de Laplace.

Application 32 : Stirling généralisé.

D/ En probabilités. [WA]

Définition 33 : Fonction caractéristique.

Développement 2

Théorème 34 : Paul-Lévy.

Théorème 35 : Théorème central limite.

Application 36 : Intervalles de confiance asymptotique.

Références :

— [R] Rombaldi Éléments d'analyse réelle p. 287 et p. 307

— [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 142, p. 287, p. 339 et p. 359

— [OBJ] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation p. 25

— [EA] El Amrani Suites et séries de fonctions p. 241-244

— [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 358, p. 362 et p. 438

— [DEM] Demailly Analyse numérique p. 133