

LEÇON N°215 : APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES DÉFINIES SUR UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Dans toute la suite on notera $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

I/ Applications différentiables.

A/ Notion de différentielle. [G] [PGCD]

Définition 1 : Applications différentiable en a et différentielle.

Proposition 2 : Unicité différentielle.

Exemple 3 : Les applications affines et linéaires sont différentiables.

Exemple 4 : Si $(n, p) = (1, 1)$ alors f différentiable en $a \iff f$ dérivable en a . (+ Annexe avec tangente)

Exemple 5 : Le produit matriciel est différentiable et calcul de sa différentielle.

Exemple 6 : L'inversion matricielle est différentiable et calcul de sa différentielle.

Proposition 7 : Différentiable $\implies$ continue.

Proposition 8 : Stabilité de la différentiabilité par la somme et le produit.

Proposition 9 : Règle de la chaîne.

Corollaire 10 : Formule de Leibniz.

Corollaire 11 : Différentielle d'une forme bilinéaire.

Définition 12 : Définition du gradient (existe toujours par le théorème de Riesz).

B/ Différentielles partielles. [G] [PGCD]

Définition 13 : Différentielle selon un vecteur.

Proposition 14 : f différentiable $\implies f$ est dérivable selon tout vecteur.

Contre-exemple 15 : La réciproque est fautive avec $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0, 0) = 0$, f est dérivable selon tout vecteur en 0 mais n'est pas différentiable en 0 car n'y est même pas continue.

Définition 16 : Dérivées partielles.

Remarque 17 : Expression différentielle et gradient dans le cas $p = 1$ avec les dérivées partielles.

Définition 18 : Matrice jacobienne.

Remarque 19 : Expression de la règle de la chaîne avec les dérivées partielles.

C/ Applications de classe C^1 . [PGCD]

Définition 20 : Applications C^1 et C^1 -difféomorphisme.

Exemple 21 : Le changement de variable polaire est un C^1 -difféomorphisme.

Développement 1.a)

Proposition 22 : Différentielle du déterminant : Si $M, H \in M_n(\mathbb{R})$, alors $d_M(\det)(H) = \text{Tr}({}^t\text{Com}(M)H)$.

Théorème 23 : $C^1 \iff$ admet des dérivées partielles continues.

II/ Différentielles d'ordres supérieurs.

A/ Différentielles secondes. [PGCD]

Définition 24 : Différentielles de tout ordre et C^k et C^∞ .

Définition 25 : Matrice hessienne et forme bilinéaire associée.

Théorème 26 : Théorème de Schwarz.

Application 27 : La hessienne est donc symétrique.

B/ Étude locale et globale. [G] [PGCD]

Proposition 28 : C^p équivaut admettre en tout ordre dériv partielles continues.

Théorème 29 : Théorème d'inversion locale.

Application 30 : Théorème des fonctions implicites.

Théorème 31 : Formule de Taylor-Young.

Théorème 32 : Formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème 33 : Inégalité des accroissements finis.

Corollaire 34 : Si $\mathcal{U}$ convexe alors f est k -lipschitzienne.

Corollaire 35 : Si $\mathcal{U}$ connexe et si la différentielle est nulle alors la fonction est constante sur $\mathcal{U}$.

Développement 2

Théorème 36 : Interversion limite-différentielle par la connexité.

Application 37 : L'exponentielle matricielle est C^1 et calcul de sa différentielle.

C/ Recherche d'extrema. [PGCD] [G]

Dans cette partie on suppose $p = 1$.

Définition 38 : Extrema locaux et globaux.

Théorème 39 : CN et CS pour avoir un extremum avec des conditions sur la hessienne.

Théorème 40 : Théorème des extréma liés.

Développement 1.b)

Application 41 : $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme 2 minimale.

Références :

- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 39, p. 95, p. 179, p. 283 et p. 359
- [G] Gourdon Analyse p. 303-321