

LEÇON N° 213 : ESPACES DE HILBERT. EXEMPLES D'APPLICATIONS.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit H un $\mathbb{K}$ -ev.

I/ Espaces de Hilbert et leur structure.

A/ Espaces préhilbertiens. [HL]

Définition 1 : Produit scalaire sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2 : Espace préhilbertien.

Exemple 3 : $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$ et $L^2(\mu)$ avec μ mesure positive sont des espaces préhilbertiens.

Proposition 4 : Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Corollaire 5 : On peut définir une norme avec le produit scalaire.

Corollaire 6 : $\phi_y = \langle \cdot, y \rangle$ est continue de norme $\|y\|$.

Proposition 7 : Identité du parallélogramme.

Théorème 8 : Théorème de Fréchet Von-neumann : Une norme dérive du produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité de parallélogramme.

Définition 9 : Orthogonal d'une partie et de deux éléments.

Proposition 10 : Toutes les relations sur les orthogonaux.

Théorème 11 : Pythagore.

B/ Espaces de Hilbert : définition et exemples. [HL]

Définition 12 : Espaces de Hilbert.

Exemple 13 : Tout espace préhilbertien de dimension finie est un Hilbert, $L^2(\mu)$ est un Hilbert.

C/ Théorème de projection sur un convexe fermé. [HL] [OBJ]

Développement 1.a)

Théorème 14 : Théorème de projection sur un convexe fermé + annexe.

Proposition 15 : Si on prend F un sev fermé, p_F est linéaire, continue, 1-lipschitzienne.

Corollaire 16 : $E = F \oplus F^\perp$.

Corollaire 17 : F dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Application 18 : Lemme de séparation d'un point et d'un convexe fermé.

Développement 1.b)

Théorème 19 : Théorème de représentation de Riesz.

Application 20 : Existence du gradient.

Application 21 : Existence adjoints dans les espaces de Hilbert.

D/ Bases hilbertiennes. [HL] [EA]

Définition 22 : Base orthogonale et orthonormale.

Proposition 23 : Procédé de Gram-Schmidt.

Proposition 24 : Une base orthogonale est libre.

Définition 25 : Base hilbertienne.

Exemple 26 : $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un Hilbert de base hilbertienne $e_n(x) = e^{inx}$.

Remarque 27 : Avec la prop 17, on a un moyen de montrer que des bases sont hilbertiennes.

Développement 2.a)

Exemple 28 : L^2_ω avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} e^{-x^2} dx$ a pour base hilbertienne $\left(\frac{H_n}{2^n n! \sqrt{2\pi}} \right)$ (les polynômes de Hermite).

Proposition 29 : Projection sur un espace de dimension finie.

Proposition 30 : Inégalité de Bessel.

Théorème 31 : Bessel-Parseval.

Théorème 32 : Expression $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Développement 2.b)

Application 33 : Diagonalisation de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

II/ Applications aux séries de Fourier. [OBJ] [G] [FGNAna2]

Définition 34 : Espace $L^2(\mathbb{T})$ muni de son produit scalaire.

Proposition 35 : Sa base hilbertienne et définition coefficients de Fourier.

Proposition 36 : Égalité de Parseval.

Application 37 : Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Application 38 : En utilisant les séries de Fourier dans un cadre plus grand on peut calculer les $\zeta(2k)$ pour tout $k \geq 1$.

Références :

- [HL] Hirsch-Lacombe Analyse fonctionnelle p. 84-96
- [G] Gourdon Analyse p. 261
- [OBJ] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation p. 97 et p. 122
- [EA] El Amrani Analyse de Fourier p. 239 et p. 246-247
- [FGNAna2] Francinou Gianella Nicolas Analyse 2 p. 308