

LEÇON N° 209 : APPROXIMATION D'UNE FONCTION PAR DES FONCTIONS RÉGULIÈRES. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I/ Approximation par des polynômes.

A/ Interpolation. [DEM]

Théorème 1 : Polynômes interpolateurs de Lagrange.

Théorème 2 : Majoration de l'erreur entre fonction et polynôme interpolateur.

Remarque 3 : L'erreur dépend des dérivées et de la répartition des points.

Remarque 4 : Phénomène de Runge : cas où le polynôme interpolateur ne converge pas simplement vers la fonction.

B/ Approximation locale. [R]

Théorème 5 : Taylor-Young.

Application 6 : DL de e^x et $\cos(x)$.

Théorème 7 : Taylor-Lagrange.

Application 8 : Critère pour être DSE au voisinage d'un point en majorant la dernière dérivée.

C/ Approximation uniforme sur un compact. [HL] [G]

Lemme 9 : Lemme de Dini.

Développement 1

Application 10 : Existence d'une suite de polynômes convergeant uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1, 1]$.

Théorème 11 : Stone-Weierstrass.

Corollaire 12 : L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X compact dans $\mathbb{R}$ est dense.

Corollaire 13 : Si $a < b$, pour tout $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ telle que (P_n) converge uniformément vers f .

Remarque 14 : Ce n'est plus vrai si on enlève le caractère compact car si P_n suite de polynômes CVU vers f sur $\mathbb{R}$ alors f est un polynôme.

Application 15 : Si f est telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b t^n f(t) dt = 0$ alors $f = 0$.

II/ Approximation par convolution. [BP]

Proposition 16 : uniforme continuité de la translation.

Proposition 17 : Convolution $L^p * L^q$.

Proposition 18 : Propriété de régularisation.

Proposition 19 : $(L^1(\mathbb{R}), +, \times, *)$ est une algèbre de Banach commutative sans unité.

Définition 20 : Approximation de l'unité.

Exemple 21 : Si $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ d'intégrale 1 alors $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ est une approximation de l'unité.

Proposition 22 : Convergence des approximations de l'unité.

Corollaire 23 : $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dense dans L^p .

Application 24 : $S(\mathbb{R})$ est dense dans L^2 .

Application 25 : Lemme de Riemann-Lebesgue.

Application 26 : La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ est injective.

III/ Bases hilbertiennes de fonctions régulières.

A/ Polynômes trigonométriques et séries de Fourier. [EA]

Définition 27 : Définition de l'espace $L_{2\pi}^p$.

Proposition 28 : $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$.

Définition 29 : Coefficients de Fourier.

Lemme 30 : Lemme de Riemann-Lebesgue.

Définition 31 : Série trigonométrique.

Définition 32 : Noyau de Dirichlet et Féjer.

Proposition 33 : Propriétés et lien entre les deux noyaux.

Théorème 34 : Féjer.

Remarque 35 : Nouvelle démonstration que les polynômes trigonométriques forment une base hilbertienne de $L_{2\pi}^2$.

Théorème 36 : Parseval dans le cas L^2 .

Théorème 37 : Dirichlet.

Application 38 : Calcul des $\zeta(2k)$ avec les coefficients de Bernouilli.

Théorème 39 : CVN des séries de Fourier si continue et C_{pm}^1

Développement 2

Application 40 : Résolution de l'équation de la chaleur dans une barre par les séries de Fourier.

B/ Polynômes et fonctions de Hermite. [EA]

Définition 41 : Polynômes de Hermite.

Proposition 42 : Après renormalisation, ils forment une base hilbertienne de L_ω^2 avec $\omega : x \mapsto e^{-x^2}$.

Proposition 43 : Diagonalisation de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$.

Références :

- [DEM] Demailly Analyse numérique p. 21-24 et p. 36
- [R] Rombaldi Éléments d'analyse réelle p. 287 et p. 307
- [HL] Hirsch-Lacombe Analyse fonctionnelle p. 26-31
- [G] Gourdon Analyse p. 228
- [BP] Briane-Pagès Théorie de l'intégration 4ème éd. p. 259
- [EA] El Amrani Analyse de Fourier p. 169-201, p. 239 et p. 246-247