Réf : Gourdon d'algèbre ; Caldero et Germoni H2G2 tome I

NOM : Allais Prénom : Simon

Rouge entourez l'épreuve Bleu entourez le Jury A B C D E F

Sujet choisi : Leçon 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'endomorphisme en dimension finie. Application

Autre sujet :

Dans toute la leçon, si aucune précision n'est apportée, k désignera un corps de caractéristique $\neq 2$, E un k-espace vectoriel (ev.) de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(k)$.

I Polynôme en un endomorphisme de E

1) La sous-algèbre $k[f]$

Prop 1 : $\forall$ k-algèbre $\mathcal{A}$ et $\forall a \in \mathcal{A}$, il existe un unique morphisme de k-algèbre $ev_a : \begin{cases} k[X] \to \mathcal{A} \\ X \mapsto a \end{cases}$. Explicitement $ev_a\left(\sum_{i=1}^{r} c_i X^i\right) = \sum_{i=1}^{r} c_i a^i$.

Déf 2 : On notera $k[f] := \mathrm{Im}(ev_f : k[X] \to \mathcal{L}(E))$ et
$k[A] := \mathrm{Im}(ev_A : k[X] \to \mathcal{M}_n(k))$

Rq 3 : La donnée d'une base $\underline{e}$ de E fournissant un isomorphisme de k-algèbre entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(k)$ via $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\underline{e}} f$, on identifiera au besoin ces espaces et chaque définition ou résultat sur l'une des deux k-algèbres trouvera sa traduction dans l'autre.

Exemples 4 : ⊛ si $P = 1 + 2X^2$, $P(f) = id + 2 f\circ f$.

⊛ si $T = \begin{bmatrix} t_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{bmatrix}$, $P(T) = \begin{bmatrix} P(t_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & P(t_n) \end{bmatrix}$, de même si les t_i sont des blocs.

Prop 5 : $k[f]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ et $\forall g, h \in k[f]$,
$g(\ker h) \subset \ker h$ et $g(\mathrm{Im}\, h) \subset \mathrm{Im}\, h$.

2) Polynôme minimal et idéal annulateur

Déf-Prop 6 : $\ker(ev_f)$ est un idéal $\neq (0)$ de $k[X]$ (principal) donc $\exists! \pi_f \in k[X]$ unitaire tq $(\pi_f) = \ker ev_f$. De plus, π_f est le polynôme minimal annulateur de f au sens où $P(f) = 0 \Rightarrow \pi_f \mid P$ si $P \neq 0$.

Exemples 7 : ⊛ p projecteur ssi $\pi_p = X^2 - X$

⊛ N nilpotent ssi $\pi_N \mid X^n$. De plus $\deg \pi_N =$ indice de nilpotence de N.

8 : calcul des puissances de f :
On écrit la division euclidienne $X^l = Q_l P_l + R_l$ où $P_l(f) = 0$ (au mieux $P_l = \pi_f$) et ainsi $f^l = R_l(f)$.

Prop 9 : si F sev de E est f-stable, alors $\pi_{f|_F} \mid \pi_f$.

Prop 10 : Le morphisme ev_f passe au quotient par (π_f) induit un isomorphisme de k-algèbre $\widetilde{ev_f} : k[X]/(\pi_f) \xrightarrow{\sim} k[f]$.

Cor 11 : $\deg \pi_f = \dim(k[f])$.

Application 12 : π_f irréductible $\Leftrightarrow$ $k[f]$ corps.

↳ **Application 13** : construction matricielle de $\mathbb{C}$
$k = \mathbb{R}$, $n = 2$, $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\pi_J = X^2 + 1$
et donc $\mathbb{R}[J] \simeq \mathbb{R}[X]/_{X^2+1} \simeq \mathbb{C}$.

3) Lemme des noyaux

Prop 14 (Lemme des noyaux) : si $P_1, \dots, P_r \in k[X]$ premiers entre eux 2 à 2, $\ker((P_1 \cdots P_r)(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(f))$

Cor 15 : si $\pi_f \mid P_1 \cdots P_r$ en plus, $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(f))$

Application 16 : les involutions sont les symétries :
$s \neq id$ et $s^2 = id \Rightarrow \pi_s = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$
$\Rightarrow E = \ker(s - id) \oplus \ker(s + id)$

↳ **Application 17** : ⊛ $s : A \mapsto {}^tA \Rightarrow \mathcal{M}_n(k) = \mathcal{A}_n(k) \oplus \mathcal{S}_n(k)$
où $\mathcal{S}_n(k) = \{M \mid {}^tM = M\}$ et $\mathcal{A}_n(k) = \{M \mid {}^tM = -M\}$

⊛ $s : f \mapsto (x \mapsto f(-x))$

↳ décomposition en partie paire et impaire des fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

II Espaces propres, diagonalisabilité et trigonalisabilité d'un endomorphisme

1) Spectre de f et espaces propres

Déf 18 : On appelle valeur propre de f (vp.) tout $\lambda \in k$ tq $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $f(x) = \lambda x$; un tel x est appelé vecteur propre ($\vec{vp}$) de f associé à λ. Le spectre (sur k) de f est l'ensemble de ses vp. L'ensemble des $\vec{vp}$ de f associés à λ est $E_\lambda = \ker(f - \lambda id)$. ↳ noté $\mathrm{Sp}\, f$

E_λ est appelé l'espace propre associé à λ.

<u>Rq 19</u> : $\forall \lambda, \mu, \quad \lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$

<u>Exemples 20</u> : $\circledast$ homothétie $h : x \mapsto \lambda x$, dans ce cas $Sp\, h = \lambda$ et $E_\lambda = E$.

$\circledast$ projecteur p sur F parallèlement à G. $Sp\, p = \{0 ; 1\}$
$E_0 = G$; $E_1 = F$ (et $E = E_0 \oplus E_1$)

<u>Prop 21</u> : $\lambda \in Sp\, f \Rightarrow P(\lambda) \in Sp\, P(\lambda)$; $\forall P \in k[X]$.

<u>Cor 22</u> : $\lambda \in Sp\, f \Rightarrow \pi_f(\lambda) = 0$

<u>Prop 23</u> : $\forall g \in \mathcal{L}(E)$ tq $g \circ f = f \circ g$, $g(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$ $\forall \lambda \in Sp\, f$.

2) <u>Polynôme caractéristique de f</u>

<u>Déf 24</u> : Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f := \det(f - X\,id)$ polynôme de degré n sur k.

<u>Ex 25</u> : $\circledast$ si $A = \begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_n \end{bmatrix}$; $\chi_A = \chi_{A_1} \cdots \chi_{A_n}$

$\circledast$ si $n = 2$, $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr} A \cdot X + \det A$

$\circledast$ si $k = \mathbb{C}$, $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$; $\chi_R = X^2 - 2\cos\alpha X + 1 = (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha})$

<u>Prop 26</u> : $\lambda \in Sp\, f$ ssi $\chi_f(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in k$.

<u>Déf 27</u> : On définit le spectre de f sur une extension K de k comme l'ensemble des racines de χ_f sur K noté $Sp_K\, f$. Le spectre de f est maximal sur $K = \mathcal{D}(\chi_f)$, le corps de décomposition de f.
On nomme multiplicité algébrique de λ sa multiplicité comme racine de χ_f et multiplicité géométrique de λ la dimension de E_λ.

<u>Rq 28</u> : Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(k)$, $Sp_K A = Sp[i(A)]$ où $i : \mathcal{M}_n(k) \hookrightarrow \mathcal{M}_n(K)$ l'inclusion canonique.

<u>Thm (Cayley-Hamilton) 29</u> : $\chi_f(f) = 0 \quad$ (i.e. $\pi_f \mid \chi_f$)

<u>Application 30</u> : $\circledast$ $\forall f \in GL(E)$, $f^{-1} \in k[f]$
$\circledast$ l'inverse d'une matrice triangulaire sup^{re} est triangulaire sup^{re}.

<u>Cor 31</u> : $\lambda \in Sp_K\, f \Leftrightarrow \pi_f(\lambda) = 0 \quad \forall K$ extension de k qlcq.

3) <u>Critères polynomiaux de diagonalisabilité et trigonalisabilité</u>

<u>Déf 32</u> : f est diagonalisable ssi $\bigoplus_{\lambda \in Sp f} E_\lambda = E$. On dira que A est diagonalisable ssi $A = \mathrm{Mat}_e\, g$ avec g diagonalisable. Cela revient à ce que A soit semblable à une matrice diagonale.

<u>Prop 33</u> : f diagonalisable $\Leftrightarrow \sum \dim E_\lambda = \dim E$

<u>Prop 34 (caractérisation polynomiale de la diagonalisabilité)</u> : sont équivalentes
(i) f diagonalisable (ii) π_f scindé à racines simples (iii) $\exists P \neq 0$ scindé à racines simples tq $P(f) = 0$

<u>Application 35</u> : $\circledast$ R_α est semblable à $\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$
$\circledast$ A scindé à une seule vp $\alpha \Leftrightarrow A = \alpha I_n$. Ainsi $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$ non diagonalisable

<u>Application 36</u> : $k = \mathbb{F}_q$, f diagonalisable ssi $X^q - X$ annule f.

<u>App 37</u> : Si $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ est une représentation de G fini, $\forall g \in G$, $\rho(g)$ diag^{lle}.

<u>Prop 38</u> : Si $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(E)$ commutent et sont diag^{lles}, ils sont simultanément diagonalisables dans le sens où $\exists \underline{e}$ base de E tq les $\mathrm{Mat}_{\underline{e}} f_i$ sont diagonales.

<u>App. 39</u> : $GL_n(k) \underset{\text{groupe}}{\simeq} GL_m(k) \Rightarrow n = m$.

<u>App. 40</u> : Si $v \circ u = u \circ v$ et u diagonalisable à vp simples, alors $\exists P \in k[X]$ tq $v = P(u)$.

<u>Déf 41</u> : A trigonalisable ssi A semblable à une matrice triangulaire

<u>Prop 42 (caractérisation polynomiale de la trigon.)</u> : sont équivalentes
(i) A trigonalisable (ii) χ_A scindé (iii) $\exists P \neq 0$ scindé tq $P(A) = 0$.

<u>Cor 43</u> : Sur k algébriquement clos, toute matrice est trigonalisable.

III Théorèmes de réductions

1) Espaces caractéristiques et décomposition de Dunford

Prop 44 : Si χ_u scindé $= \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$ ($\lambda_i \neq$ 2 à 2), alors π_u scindé $= \prod(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ de sorte que $E = \bigoplus_{j=1}^{r} \ker(f-\lambda_j id)^{\alpha_j}$; on a de plus $\ker(f-\lambda_j id)^{\alpha_j} = \ker(f-\lambda_j id)^{\beta_j} =: F_{\lambda_j}$.

Déf 45 : Les F_{λ_j} sont appelés sev caractéristiques de f associés aux λ_j. On appelle projecteurs spectraux les projecteurs $p_j : E \to F_{\lambda_j}$ associés à la somme directe $\bigoplus F_{\lambda_j}$.

Prop 46 : Les projecteurs spectraux sont des polynômes en l'endomorphisme.

Thm 47 (Décomposition de Dunford) : Si χ_f scindé, $\exists! d, \nu \in \mathcal{L}(E)$ tq d diagonalisable, ν nilpotente, $d\circ\nu = \nu\circ d$ et $f = d+\nu$. De plus $d, \nu \in k[f]$.]] DVT 1

App 48 : Calcul d'exponentielles
$\forall A \in \mathcal{M}_n(k)$, $\exists P \in GL_n(k)$, $\exists D, N \in \mathcal{M}_n(k)$ tq $PAP^{-1} = D+N$ où $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ et N nilpotente

$$\exp A = P^{-1}\, diag(e^{d_i})\, Q(N) P \quad \text{où } Q \in k_n[X].$$

↳ **App 49 : Étude asymptotique d'EDO linéaire**
$k = \mathbb{C}$, Pour une équation $X' = AX$, $\mathbb{R}^n = E_+ \oplus E_0 \oplus E_-$ tq

$p_{E_+}(X(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et $p_{E_-}(X(t)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ avec

$$E_+ = \bigoplus_{\lambda \text{ tq } Re\lambda > 0} F_\lambda, \quad E_- = \bigoplus_{\lambda \text{ tq } Re\lambda < 0} F_\lambda \quad \text{et} \quad E_0 = \bigoplus_{Re\lambda = 0} F_\lambda$$

Pour étudier $p_{E_0}(X(t))$, il faut encore une meilleure compréhension des matrices nilpotentes (fournie par Jordan, par exemple).

2) Invariants de similitude et décomposition de Frobenius

Déf 50 : À tout $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in k[X]$, on associe la matrice $C_P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}$ de sorte que $\chi_{C_P} = (-1)^n P$. C_P est la matrice compagnon de P.

Déf 51 : Un sev $F \subset E$ est dit f-cyclique ssi $\exists x \in F$ tq $Vect(f^i(x))_i = F$. Cela revient à l'existence d'une base $\underline{e}$ de F tq $Mat_{\underline{e}} f_{|F} = C_P$ pour $P \in k[X]$.
f est dit cyclique ssi E est f-cyclique.

Prop 52 : f cyclique ssi $\chi_f = \pi_f$.

Déf 53 : $\forall x \in E$, On définit le polynôme minimal annulateur ponctuel en x $\pi_{f,x}$ comme le générateur unitaire de l'idéal $\{P \in k[X] \mid P(f)(x) = 0\} \subset k[X]$.

Ex 54 : p projecteur sur F // à G, $\forall x \in G$, $\pi_{p,x} = X$, $\forall x \in F$ $\pi_{p,x} = X-1$,
$\forall x \in E \setminus (F \cup G)$, $\pi_{p,x} = X(X-1) = \pi_p$.

Rq 55 : $\pi_{f,x} \mid \pi_f$. $\forall x \in E$

Prop. 56 : $\exists x \in E$ tq $\pi_{f,x} = \pi_f$

Thm 57 (Décomposition de Frobenius) : $\forall f \in \mathcal{L}(E)$ $\exists F_1, \dots, F_r$ tq $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ et tq les $f_i := f_{|F_i}$ soient cycliques avec $\pi_{f_{i+1}} \mid \pi_{f_i}$. Les $P_i := \pi_{f_i}$ sont uniques et appelés invariants de similitude]] DVT 2 (existence)

Cor 58 : Toute matrice est semblable à une matrice $\begin{bmatrix} C_{P_1^A} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r^B} \end{bmatrix}$ avec $P_{i+1}^A \mid P_i^A$ et A semblable à B ssi $P_i^A = P_i^B$ $\forall i$.

Rq 59 : Les invariants de similitude forment un invariant total pour la relation d'équivalence par conjugaison de $GL(E) \circlearrowright \mathcal{L}(E)$.

App 60 : Découplage d'un système d'EDOL

$$X' = AX \iff \begin{cases} a_{1k_1} y_1^{(k_1)} + \dots + a_{10} y_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{\ell k_\ell} y_\ell^{(k_\ell)} + \dots + a_{\ell 0} y_\ell = 0 \end{cases}$$

Ex 61 : $\dot{\vec{v}} = \vec{v} \wedge \vec{B} \iff \begin{cases} \dot{z} = z \\ \dot{u} = -i B_0 u \end{cases}$

Cor 62 (Décomposition de Jordan des matrices nilpotentes) : $\forall N$ nilpotente, $\exists! \nu_1 \leq \dots \leq \nu_k$ tq $N = \begin{bmatrix} J_{\nu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\nu_k} \end{bmatrix}$ où $J_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \Big\}\, \nu$

App 63 : $A \sim {}^tA$.