

LEÇON N° 206 : EXEMPLE D'UTILISATION DE LA DIMENSION FINIE EN ANALYSE.

I/ Topologie en dimension finie.

On prend E un $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)-ev avec norme $\|\cdot\|_E$.

A/ Dans les espaces vectoriels normés. [G]

Définition 1 : Normes équivalentes.

Développement 1.a)

Lemme 2 : Pour tout E $\mathbb{K}$ -ev, les fermés bornés de $(E, \|\cdot\|_{\infty, E})$ sont compacts.

Théorème 3 : Équivalence des normes en dimension finie.

Corollaire 4 : Toute application linéaire d'un evn de dimension finie vers un evn quelconque est continue.

Remarque 5 : Faux en dimension infinie avec $P \mapsto P'$ avec la norme infinie sur $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 6 : Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé.

Application 7 : $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Corollaire 8 : Tout espace de dimension finie est complet.

B/ Compacité. [G] [CAL]

Corollaire 9 : Les compacts en dimension finie sont les fermés bornés.

Exemple 10 : Les segments sur $\mathbb{R}$ sont compacts, $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Développement 1.b)

Théorème 11 : Théorème de Riesz

Proposition 12 : En dimension finie, une suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Exemple 13 : $((-1)^n)_n$ admet 2 valeurs d'adhérences donc ne converge pas.

Application 14 : La décomposition polaire est un homéomorphisme.

II/ En calcul différentiel.

A/ Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. [PGCD]

Dans toute la suite $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Définition 15 : Application différentiable et différentielle.

Remarque 16 : En dimension finie, la différentiabilité ne dépend pas de la norme.

Définition 17 : Dérivabilité selon un vecteur + dérivées partielles.

Théorème 18 : Si les dérivées partielles existent et sont continues alors la fonction est de classe C^1 .

Définition 19 : Matrice jacobienne.

Proposition 20 : Règle de la chaîne.

Application 21 : Calcul du laplacien en polaire.

Définition 22 : C^1 -difféomorphisme.

Théorème 23 : Changement de variable.

Application 24 : Intégrale de Gauss.

B/ Optimisation. [G] [PGCD]

Définition 25 : Différentielles partielles secondes.

Théorème 26 : Théorème de Schwarz.

Définition 27 : Matrice Hessienne, elle est symétrique.

Remarque 28 : La hessienne est la matrice de la forme bilinéaire associée.

Théorème 29 : Si $f \in C^2$ CN et CS pour avoir un minimum local.

Théorème 30 : Théorème des extrema liés.

Développement 2

Proposition 31 : Différentielle du déterminant : Si $M, H \in M_n(\mathbb{R})$, alors $d_M(\det)(H) = \text{Tr}({}^t\text{Com}(M)H)$.

Application 32 : $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme 2 minimale.

Application 33 : Inégalité arithmético-géométrique.

III/ Applications.

A/ Projection dans un préhilbertien et séries de Fourier. [G]

Définition 34 : Espace préhilbertien + Hilbert.

Remarque 35 : En dimension finie sont des Hilbert.

Théorème 36 : Théorème de projection sur un convexe fermé non vide.

Corollaire 37 : La projection est continue, linéaire.

Définition 38 : Espace des fonctions D .

Notation 39 : Les polynômes trigonométriques forment une famille libre orthonormale de D .

Proposition 40 : Projection sur $\mathcal{P}_n$.

Corollaire 41 : Inégalité de Bessel + Parseval.

B/ En équations différentielles. [G] [PGCD]

On considère les équations du type $Y'(t) = A(t)Y(t) + b(t)$.

Théorème 42 : Théorème de Cauchy linéaire.

Proposition 43 : L'espace des solutions est un sous-espace affine de dimension n .

Définition 44 : Wronskien.

Proposition 45 : (Identité d'Abel) Équation différentielle vérifiée par le Wronskien : $W'(t) = \text{Tr}(A(t))W(t)$ et $W(0) = 1$.

Application 46 : $\det(e^{tA}) = e^{t\text{Tr}(A)}$.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 50, p. 258, p. 321 et p. 358
- [CAL] Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 201
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 39, p. 76, p. 283 et p. 359