Leçon 218 - Formules de Taylor. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

La connaissance des formules de Taylor, en une ou plusieurs variables, de leurs différences et de leurs champs d'applications, allant de la géométrie jusqu'aux probabilités, doit constituer le coeur de la leçon, illustrée par des exemples pertinents. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Cette analyse impose une bonne connaissance des relations de comparaison (des confusions entre o et O sont parfois constatées).
Le jury rappelle que le lien entre l'existence d'un développement limité à un ordre n et l'existence d'une dérivée n-ième doit être connu. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives.
Pour les candidates et candidats solides voulant aller plus loin, on peut mentionner des applications en géométrie (lemme de Morse, étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema) et, même si c'est plus anecdotique, en probabilités (théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 218 intitulée : "Formules de Taylor. Exemples et applications.". Historiquement, les fonctions les plus simples à calculer furent les fonctions polynomiales. C'est pourquoi l'on a cherché à approcher les fonctions par de telles fonctions. Même au XXIème siècle, à l'âge du numérique, les fonctions polynomiale restent des fonctions utiles pour les problèmes d'approximations et pour lesquelles on dispose de méthodes numériques extrêmement efficaces de calcul.
Dans une première partie, on commence avec les formules de Taylor. Tout commence avec le théorème de Rolle qui donne le théorème des accroissements finis et l'égalité des accroissements finis. Ces deux derniers résultats sont des cas particuliers des formules de Taylor : c'est l'objet des sous-parties suivantes. On commence avec les formules de Taylor-Laplace et de Taylor-Lagrange à l'ordre n qui sont des résultats globaux et donnent des résultats sur un intervalle. On enchaîne ensuite avec la formule de Taylor-Young qui est un résultat local et donne des résultats de régularité de fonctions par exemple. On termine cette partie par le cas des fonctions de $\mathbb{R}^q$. On commence par la formule de Taylor-Lagrange qui est fausse si l'on sort du cadre des fonctions à valeurs réelles (comme l'égalité des accroissements finis) puis on termine avec les formules de Taylor-Laplace et de Taylor-Young.
On passe ensuite à des applications avec tout d'abord le lien entre les formules de Taylor et les développements limités et en série entière. En ce qui concerne les développements limités, on en rappelle la définition puis on fait le lien entre développement limité et continuité/dérivabilité. On retrouve ensuite les développements limités usuels grâce à la formule de Taylor-Young. On passe ensuite au cas du développement en série entière en commençant par en rappeler la définition puis on énonce le théorème de Bernstein qui donne une condition suffisante pour que f soit développable en série entière.
Dans une troisième partie, on donne une application dans le cas des probabilités. On commence par parler du théorème central limite. On rappelle la définition de la convergence en loi et de la fonction caractéristique avant de finir par quelques exemples ainsi que le théorème de Lévy qui ramène l'étude d'une convergence en loi à la convergence simple d'une suite de fonctions et le théorème central-limite. On termine avec une dernière application en probabilités avec les lemmes de Borel-Cantelli (qui sont utilisés lorsque l'on veut connaître des résultats sur des événements asymptotiques) : on rappelle les énoncés de ces lemmes que l'on peut résumer avec la loi du 0-1 de Borel et on termine par une application.
On conclut par des applications aux méthodes numériques avec en premier lieu l'intégration numérique. Le but ici est de calculer de manière approchée une intégrale. On commence alors par la méthode des rectangles qui donne une erreur en $\frac{1}{n}$. Cette méthode est donc celle qui se rapproche le plus de la définition de l'intégrale de Riemann avec les sommes de Riemann mais sa convergence est très lente... C'est pourquoi on passe ensuite à la méthode des trapèzes où l'on a remplacé les rectangles par des trapèzes. Cette méthode possède une convergence plus rapide car en $\frac{1}{n^2}$. On termine enfin cette leçon par la résolution approchée d'équations avec la méthode de

Newton qui est justifiée par les formules de Taylor.
On trouvera également en annexe une illustration de la méthode de Newton.

Plan

Cours détaillé

Dans toute cette leçon on considère un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

I Les formules de Taylor

Proposition 1 : [Deschamps (1), p.657]
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction polynomiale de degré au plus n.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Définition 2 : Fonction polynomiale de Taylor d'ordre n [Deschamps (1), p.657] :
On considère $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.
On appelle **fonction polynomiale de Taylor d'ordre n en a associée à f** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

I.1 Prémices aux formules de Taylor

Théorème 3 : Théorème de Rolle [Deschamps (1), p.562] :
Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ telle que $g(a) = g(b)$.
Il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Remarque 4 : [Deschamps (1), p.562]
Bien noter que le théorème de Rolle fournit l'existence d'un c tel que $g'(c) = 0$, mais en aucun cas l'unicité.

Théorème 5 : Théorème de Darboux [Deschamps (1), p.599] :
Si f est dérivable sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle.

Théorème 6 : Égalité des accroissements finis [Deschamps (1), p.562] :
Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Il existe $c \in]a;b[$ tel que $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$.

Remarque 7 : [Deschamps (1), p.581]
Le théorème des accroissements finis n'est pas vrai pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. En effet, la fonction g définie sur $[0;2\pi]$ par $f(x) = e^{ix}$ ne vérifie pas l'égalité des accroissements finis.

Théorème 8 : Inégalité des accroissements finis [Deschamps (1), p.567] :
Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. S'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathring{I}$, $|g'(x)| \leq M$, alors g est M-lipschitzienne.

I.2 Formules globales

Théorème 9 : Formule de Taylor-Laplace à l'ordre n [Deschamps (1), p.657] :
Soient $a \in I$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Pour tout $x \in I$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$.

Remarque 10 : [Deschamps (1), p.658]
∗ La formule de Taylor-Laplace permet de donner l'erreur commise en approchant $f(x)$ par la fonction polynomiale de Taylor d'ordre n en a associée à f en x.
∗ Pour utiliser la formule de Taylor-Laplace à l'ordre n, la fonction f doit être de classe $\mathcal{C}^{n+1}$!

Exemple 11 : [Deschamps (1), p.658]
∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
∗ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Théorème 12 : Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n [Deschamps (1), p.658] :
Soient $a \in I$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ est majorée par une constante M_{n+1}, alors pour tout $x \in I$, on a :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Exemple 13 : [Deschamps (1), p.658]
On note f l'application définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(1+x)$.
Pour tout $x \in [0;1]$, on a $\ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

Proposition 14 : [Deschamps (1), p.683]
Soit f une fonction positive ou nulle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
Si f'' est bornée par une constante M, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité $|f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)}$.

I.3 Formule locale

Proposition 15 : [Deschamps (1), p.659]
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Il existe une fonction α définie sur $[a;b]$ telle que :

$$\forall x \in [a;b],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \alpha(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$$

Théorème 16 : Formule de Taylor-Young à l'ordre n [Deschamps (1), p.659] :
Soient $a \in I$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Il existe une fonction α définie sur I telle que :

$$\forall x \in [a;b],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \alpha(x) \text{ et } \lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$$

Remarque 17 : [Deschamps (1), p.659]
∗ La formule de Taylor-Young signifie que la différence entre f et son polynôme de Taylor d'ordre n en a tend plus vite vers 0 en a que $(x-a)^n$.
∗ Pour utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre n la fonction f doit être de classe $\mathcal{C}^n$, alors que pour utiliser la formule de Taylor-Laplace à l'ordre n la fonction f doit être de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
∗ Si le résultat que l'on veut démontrer est global, il faut utiliser la formule de Taylor-Laplace ou Taylor-Lagrange. Tandis que si le résultat est local, la formule de Taylor-Young peut rendre service.

Exemple 18 : [Deschamps (1), p.660]
∗ On a $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.
∗ On considère I un intervalle d'intérieur non vide contenant 0 et f de classe $\mathcal{C}^2$. La fonction $g : x \longmapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0 et de plus, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

I.4 Le cas de $\mathbb{R}^q$

Dans toute cette sous-partie, on considère $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ (avec $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^q$).

Pour tout $n \in [\![1;k]\!]$, on note :

$$\left[\sum_{i=1}^{q} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right]^{[n]} = \sum_{i_1+\ldots+i_q=n} \frac{n!}{i_1!\ldots i_q!} h_1^{i_1}\ldots h_q^{i_q} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_q^{i_q}}(a)$$

Théorème 19 : Formule de Taylor-Lagrange [Gourdon, p.328] :
Soit $f : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) une application de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathcal{U}$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si le segment $[x; x+h] = \{x + th,\ t \in [0;1]\}$ est inclus dans $\mathcal{U}$, alors il existe $\theta \in]0;1[$ tel que :

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[k]}\right) + \frac{1}{p!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)\right]^{[p]}$$

Exemple 20 : [Gourdon, p.329]

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, il existe $\theta \in]0;1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(h,k) &= f(0,0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta h,\theta k) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\theta h,\theta k) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta h,\theta k)\right) + o\left(\|(h,k)^2\|\right)\end{aligned}$$

Remarque 21 : [Gourdon, p.329]

Attention, comme pour l'égalité des accroissements finis, ceci n'est vrai que pour des fonctions à valeurs réelles ! Pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, on peut par contre utiliser la formule de Taylor-Laplace.

Théorème 22 : Formule de Taylor-Laplace [Gourdon, p.329] :

Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$, $x \in \mathcal{U}$ et $h = (h_1, ..., h_q) \in \mathbb{R}^q$.
Si le segment $[x; x+h]$ est inclus dans $\mathcal{U}$, alors :

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{k-1}\left(\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{q} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[k]}\right) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}\left[\sum_{i=1}^{q} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th)\right]^{[k]} \mathrm{d}t$$

Théorème 23 : Formule de Taylor-Young [Gourdon, p.329] :

Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ et $x \in \mathcal{U}$.
Lorsque $h = (h_1, ..., h_q) \in \mathbb{R}^q$ tend vers 0, on a :

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{k}\left(\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=1}^{q} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{[k]}\right) + o\left(\|h\|^k\right)$$

Lemme 24 : Lemme d'Hadamard [Gourdon, p.331] :

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Si $f(0) = 0$, alors pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, il existe une fonction $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, ..., x_n)$.
Si de plus $df_0 = 0$, alors pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$, il existe une fonction $h_{i,j} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{i,j}(x_1, ..., x_n)$.

Remarque 25 :

Si $n = 1$, ce lemme peut être vu comme un résultat de division par x : si $f(0) = 0$, alors $\frac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si de plus $f'(0) = 0$, alors on a la même conclusion pour $\frac{f(x)}{x^2}$.

II Développements limités et en série entière

II.1 Développement limité

Définition 26 : Développement limité au voisinage de 0 [Deschamps (1), p.707] :

On considère f une fonction définie au voisinage de 0.
On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en 0** lorsqu'il existe des complexes $a_0, ..., a_n$ et une fonction ε définie sur $\mathcal{D}_f$ tels que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Proposition 27 : [Deschamps (1), p.709]

Une fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0 si, et seulement si, elle admet une limite finie en 0.

Proposition 28 : [Deschamps (1), p.710]

Soit f une fonction définie en 0.
Une fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 si, et seulement si, f est dérivable en 0.

Remarque 29 : [Deschamps (1), p.710]

Les deux dernières propositions ne se généralisent pas aux ordres supérieurs. On peut par exemple considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$ pour s'en convaincre.

La formule de Taylor-Young nous permet d'obtenir certains développements limités usuels :

Exemple 30 : [Deschamps (1), p.711]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, on peut alors appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0 et on obtient l'égalité : $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

Exemple 31 : [Deschamps (1), p.711 + 712]
Les fonctions élémentaires suivantes étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, la formule de Taylor-Young nous assure qu'elles possèdent chacune un développement limité à tout ordre en 0, que l'on peut obtenir comme dans l'exemple précédent.

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \text{ et } \sin(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

Pour un réel α quelconque, on a :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$$

En particulier, on a :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o\left(x^3\right)$$

II.2 Développement en série entière

Définition 32 : Fonction développable en série entière [Deschamps (2), p.613] :
On considère $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ un voisinage de 0 et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C}$.
On dit que f **est développable en série entière** lorsqu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $t \in]-r;r[$, $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$.

Remarque 33 : [Deschamps (2), p.613]
On a une définition analogue dans le cas complexe.

Définition 34 : Série de Taylor [Deschamps (2), p.613] :
On considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
On appelle **série de Taylor de** f la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Remarque 35 : [Deschamps (2), p.628]
Les séries de Taylor sont moins utilisées pour obtenir un développement en série entière. Cependant, lorsque les dérivées successives sont très faciles à calculer on peut chercher à montrer que la série de Taylor de f coïncide avec f sur un voisinage de 0.

Proposition 36 : [Deschamps (2), p.628]
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle de la forme $I =]-a;a[$.
S'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière en 0 sur $]-R;R[$ où $R = \min(a,\rho)$.

Théorème 37 : Théorème de Bernstein [Deschamps (2), p.628] :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.
Si f et toutes ses dérivées sont positives sur ce voisinage, alors f est développable en série entière.

Proposition 38 : [Deschamps (2), p.628]
Soient $\lambda \in]0;1[$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) = f(\lambda x)$.
f est développable en série entière et on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}x^n$.

III Application en probabilités

Dans toute cette partie, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

III.1 Le théorème central limite

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X également une variable aléatoire réelle.

Définition 39 : Convergence en loi [Queffélec, p.542] :
On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X lorsque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f(X_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)$.

Définition 40 : Fonction caractéristique [Chabanol, p.43] :
On appelle **fonction caractéristique de** X, la fonction :

$$\Phi_X : \left|\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \end{array}\right.$$

Remarque 41 : [Chabanol, p.43]
Ceci permet de voir la fonction caractéristique comme la transformée de Fourier de la loi de X (elle existe toujours car $\left|e^{itX}\right| = 1$ et $\mathbb{P}_X$ est une mesure bornée).
On en déduit de plus que Φ_X est continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 42 :
$*$ Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\Phi_X : t \longmapsto 1-p+pe^{it}$.
$*$ Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\Phi_X : t \longmapsto \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
$*$ Si X suit une loi de Poisson de paramètre μ, alors $\Phi_X : t \longmapsto e^{\mu\left(e^{it}-1\right)}$.

Lemme 43 : [Queffélec, p.542]
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f(X_n)\right) = \mathbb{E}\left(f(X)\right)$.

Théorème 44 : Théorème de Lévy [Queffélec, p.544] :
On a équivalence entre :
$*$ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
$*$ La suite $(\Phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ_X.

Développement 1 : [cf. CHABANOL + QUEFFELEC]

Lemme 45 : [Queffélec, p.549]
Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes de limite $z \in \mathbb{C}$, alors on a $\left(1+\dfrac{z_n}{n}\right)^n$ qui converge vers e^z quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 46 : [Chabanol, p.44]
$*$ On a $\Phi_X(0) = 1$.
$*$ De plus, si X^k est intégrable pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors les dérivées à l'origine existent jusqu'à l'ordre k et $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left(X^k\right)$.
En particulier, $\Phi'_X(0) = i\mathbb{E}(X)$ et $\Phi''_X(0) = -\mathbb{E}\left(X^2\right)$.

Théorème 47 : Théorème central limite [Queffélec, p.549] :
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\mathbb{R})$ indépendantes et identiquement distribuées de moyenne μ et de variance commune σ^2, en notant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, alors on a :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}_1(0,1)$$

III.2 Lemmes de Borel-Cantelli

Lemme 48 : Lemme I de Borel-Cantelli [Chabanol, p.16]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$ (c'est-à-dire, presque-sûrement, seulement un nombre fini des événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réalisé).

Lemme 49 : Lemme II de Borel-Cantelli [Chabanol, p.16]
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants.
Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n\right) = 1$ (c'est-à-dire, presque-sûrement, seulement un nombre infini des événements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réalisé).

Remarque 50 :
$*$ L'hypothèse d'indépendance n'est pas utile dans le lemme I de Borel-Cantelli mais nécessaire dans le lemme II de Borel-Cantelli. En effet, si l'on considère U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0;1]$ et que l'on pose $A_n = \left\{U \leq \frac{1}{n+1}\right\}$, alors on a $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$ alors que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
$*$ Dans le cas d'une suite infinie d'événements indépendants, on peut résumer les lemmes I et II de Borel-Cantelli en une seule proposition.

Proposition 51 : Loi du 0-1 de Borel :
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants.
On a les équivalences :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \iff \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n\right) = 1 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \iff \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n\right) = 0$$

Proposition 52 : [Gourdon, p.332]
Il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\mathbb{P}\left(\{\text{Multiples de } n\}\right) = \frac{1}{n}$.

IV Application aux méthodes numériques

IV.1 Résolution approchée d'équations : la méthode de Newton

On considère $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $f' > 0$ sur $[a;b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe opposé.

Pour trouver le point $c \in [a;b]$ tel que $f(x) = 0$, on va l'approcher à partir d'un point $x_0 \in [a;b]$ par la tangente de f en x_0 et l'axe des abscisses et réitérer le processus. Cela revient à définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Développement 2 : [cf. ROUVIERE]

Théorème 53 : Méthode de Newton [Rouvière, p.152] :

Soit $f : [c;d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c;d]$ et on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [c;d]$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
$*$ f possède un unique zéro noté a et pour tout $x \in [c;d]$, il existe $z \in [a;x]$ tel que $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$.
$*$ Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [c;d]$, $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha; a+\alpha]$ soit stable par F et que pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une convergence d'ordre 2 vers a dans I.
$*$ Si on suppose de plus que $f'' > 0$ sur $[c;d]$, alors l'intervalle $I = [a;d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec :

$$0 \leq x_{n-1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et } x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$$

Remarque 54 :
Le premier résultat est un résultat local, tandis que dans le second résultat, on suppose f convexe pour avoir la convergence d'ordre 2.

IV.2 Intégration numérique

IV.2.1 Méthode des rectangles

Lemme 55 : [Deschamps (1), p.660]
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f(a)\right| \leq \frac{M_1}{2}(b-a)^2 \text{ avec } M_1 = \max_{x\in[a;b]}|f'(x)|$$

Proposition 56 : [Deschamps (1), p.661]
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n(f)\right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n} \text{ avec } M_1 = \max_{x\in[a;b]}|f'(x)|$$

Remarque 57 : [Deschamps (1), p.661]
La méthode des rectangles n'est pas très efficace car l'erreur de la méthode est en $\frac{1}{n}$, cela signifie grosso modo que pour avoir une valeur approchée à 10^{-p} près, il faut faire 10^p calculs ! Il faut donc nous tourner vers des méthodes plus efficaces.

IV.2.2 Méthode des trapèzes

Lemme 58 : [Deschamps (1), p.662]
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)^3 \text{ avec } M_2 = \max_{x\in[a;b]}|f''(x)|$$

La méthode des trapèzes consiste donc à approcher l'intégrale par $S_n'(f)$ qui est la somme des aires des trapèzes associés à la subdivision régulière à $n+1$ points, c'est-à-dire par :

$$S_n'(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f(a_k)\right)$$

où l'on a noté $a_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

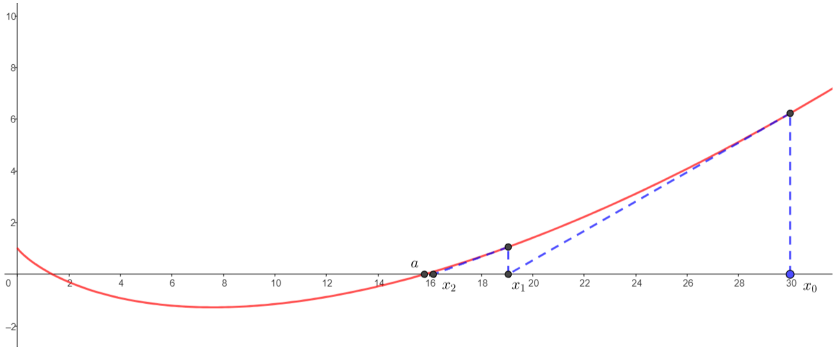
Proposition 59 : [Deschamps (1), p.662]
Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n'(f)\right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

Remarque 60 : [Deschamps (1), p.661]
$*$ La méthode des trapèzes est déjà plus efficace que celle des rectangles car l'erreur de la méthode est en $\frac{1}{n^2}$.
$*$ Il est également possible d'obtenir d'autres méthodes de quadratures encore plus efficaces comme la méthode de Simpson par exemple.

V Annexe

V.1 Illustration de la méthode de Newton



Remarques sur le plan

— Il faut savoir faire le lien entre les formules de Taylor et le développement en série entière et savoir montrer que des fonction sont $\mathcal{C}^\infty$ par raccordement.

— On peut également parler des comportement locaux des courbes et surfaces (nature des extremum) ainsi que des courbes paramétrées.

Liste des développements possibles

— Théorème de Lévy + TCL.

— Méthode de Newton.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Hervé Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*.

— Marie Line Chabanol, *Probabilités et Statistiques pour l'épreuve de Modélisation*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*.