Leçon 215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

L'idée de départ de cette leçon est qu'une fonction suffisamment régulière se comporte localement comme une application linéaire. De nombreuses différentielles usuelles (notamment issues de l'algèbre linéaire) peuvent ainsi être obtenues en calculant directement un développement limité. Sur ce point, une aisance raisonnable est attendue par le jury.
Un cas particulier important est la caractérisation des fonctions holomorphes parmi les fonctions différentiables, et son interprétation géométrique.
Les candidates et candidats semblent semblent en général peu familiers avec les propriétés élémentaires des fonctions harmoniques, qui fournissent pourtant un riche champ d'applications.
Les candidates et candidats solides solides pourront s'intéresser à la différentielle de l'exponentielle matricielle, ainsi qu'aux points où celle-ci est un difféomorphisme local.
Pour ce qui concerne les applications, de nombreux thèmes relatifs aux leçons 214 ou 219 sont ici appropriés.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 215 intitulée : "Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.". Un des objectifs de base du calcul différentiel est d'approcher localement une fonction par une application linéaire, généralisant la notion de dérivabilité et ramenant ainsi des problèmes d'analyse à des objets d'algèbre linéaire. L'étude de la différentielle apporte alors de nombreuses informations fines sur la fonction initiale. L'objectif de cette leçon est de revoir les généralités ainsi que les grands théorèmes du calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$.
Dans une première partie, on s'intéresse à la différentiabilité en commençant par un premier point sur la définition et les premières propriétés. On commence tout d'abord par rappeler la définition d'une fonction différentiable en un point ainsi que des exemples classiques de différentielles. On donne ensuite le comportement de la différentielle avec des opérations telles que la somme, la composition et le produit par un scalaire. On passe encore à un premier résultat qui est l'inégalité des accroissements finis ainsi que des conséquences et on notera cependant que le théorème des accroissements finis n'est plus vrai dans le cas général ! Dans une deuxième partie on s'intéresse aux dérivées partielles qui ne sont rien d'autre que des dérivées suivant un vecteur. On énonce ainsi la définition d'une dérivée selon un vecteur ainsi que la dérivée partielle avant d'introduire la matrice jacobienne qui est utilisée pour les changements de variables dans les intégrales ainsi qu'un lien entre les dérivées partielles et la différentielle. Pour terminer cette partie, on parle des différentielles d'ordre supérieur en commençant par en donner la définition puis en parlant de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ puis en donnant le théorème de Schwartz ainsi qu'un corollaire qui constituent un deuxième résultat important. On termine en donnant la définition de la matrice hessienne qui sera utile lors de l'étude des extrema ainsi que du laplacien accompagnée d'un exemple.
Dans une deuxième partie, on s'intéresse aux théorèmes fondamentaux du calcul différentiel. Tout d'abord, on parle des théorèmes d'inversion en commençant par le théorème d'inversion locale puis le théorème d'inversion globale avant d'introduire la notion de $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme qui est très importante en calcul différentiel et de donner un exemple. Dans un deuxième point, on accorde une attention particulière au théorème des fonctions implicites en commençant par l'énoncer puis en donnant un exemple d'existence et d'unicité de solution d'une équation donnée. Enfin, on termine cette partie en considérant le cas des extrema. On commence par rappeler une condition nécessaire pour être un extremum relatif puis on donne la définition d'un point critique. On énonce ensuite le théorème 44 qui permet de relier les extrema en fonction de la hessienne et on finit en énonçant le théorème des extrema liés ainsi qu'un exemple.
Dans une dernière partie, on donne quelques applications du calcul différentiel. Tout d'abord dans le cadre des espaces de matrices, on donne la différentielle du déterminant ainsi que les matrices minimisant une certaine norme sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et on termine par le cas de l'exponentielle matricielle. On passe ensuite dans un deuxième point aux fonctions holomorphes et harmoniques. Pour cela, on rappelle les conditions de Cauchy-Riemann puis on examine ensuite le lien entre fonctions harmoniques et fonctions holomorphes

avec les propositions 52 et 53 et on termine avec le principe du maximum. Enfin, on conclut cette leçon avec une dernière sous-partie consacrée aux fonctions convexes. On donne donc la définition d'une fonction α-convexe ainsi que quelques propriétés dans le but d'énoncer l'algorithme de descente du gradient (à pas constant) ainsi qu'une condition pour que celui-ci converge vers l'unique solution d'un problème donné.
On trouvera également en annexe une illustration géométrique du théorème d'inversion locale et des fonctions implicites.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de E, $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$ ainsi qu'un point $a \in \mathcal{U}$.

I Différentiabilité

I.1 Définition et premières propriétés

Définition 1 : Fonction différentiable en un point [Gourdon, p.323] :
On dit que f est **différentiable en** a lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\|_F}{\|h\|_E} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad (*)$$

Remarque 2 : [Gourdon, p.323]
$(*)$ s'écrit aussi : $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|_E)$.

Proposition 3 : [Gourdon, p.323 + 324]
Si f est différentiable en a, alors φ est unique et on l'appelle **différentielle de** f **en** a et on la note df_a.

Exemple 4 : [Gourdon, p.323 + 330]
$*$ Si f est linéaire, alors elle est différentiable en tout point de E et pour tout $a \in E$, $df_a = f$.
$*$ Si f est bilinéaire de $E \times E$ dans F, alors elle est différentiable et pour tout $(a, b) \in E^2$, $df_{(a,b)} = [(h_1, h_2) \longmapsto f(a, h_2) + f(h_1, b)]$.

Exemple 5 : [Gourdon, p.330 + 331]
$*$ On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
L'application $f_p : A \longmapsto A^p$ est différentiable sur E et pour tous $A \in E$ et $H \in E$, $df_{p,A}(H) = \sum_{i=0}^{p-1} A^i H A^{p-1-i}$.
$*$ On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{U} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
L'application $f : A \longmapsto A^{-1}$ est différentiable sur $\mathcal{U}$ et pour tous $A \in E$ et $H \in E$, $df_A(H) = -A^{-1} H A^{-1}$.

Proposition 6 : [Gourdon, p.324]
Une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

Proposition 7 : [Gourdon, p.324]
Soient $g : \mathcal{U} \longrightarrow F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$*$ Si f et g sont différentiables en a, alors $f+g$ est différentiable en a et on a $d(f+g)_a = df_a + dg_a$.
$*$ Si f est différentiable en a, alors λf est différentiable en a et $d(\lambda f)_a = \lambda df_a$.

Proposition 8 : [Gourdon, p.324]
Soient G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{V} \subseteq F$ un ouvert de F, $g : \mathcal{V} \longrightarrow G$ tels que $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$.
Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f : \mathcal{U} \longrightarrow G$ est différentiable en a et $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

Théorème 9 : Inégalité des accroissements finis [Gourdon, p.237]
Soient $(b,c) \in \mathcal{U}^2$ tel que $[b;c] = \{tb + (1-t)c,\ t \in [0;1]\} \subseteq \mathcal{U}$.
Si f est continue sur $[b;c]$, différentiable sur $]b;c[$ et s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $d \in]b;c[,\ |||df_d||| \leq M$, alors $\|f(c) - f(b)\|_F \leq M \|c-b\|_E$.

Remarque 10 : [Gourdon, p.74]
Le théorème des accroissements finis n'est cependant plus vrai lorsque $\dim(F) > 1$.
En effet, si l'on considère la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array} \right.$$

alors f est continue sur $[0;2\pi]$ et différentiable sur $]0;2\pi[$ avec $f(0) = f(2\pi)$, mais pour tout $t \in]0;2\pi[,\ f'(t) = ie^{it} \neq 0$.

Corollaire 11 : [Gourdon, p.328]
$*$ Si $\mathcal{U}$ est convexe, f différentiable sur $\mathcal{U}$ et pour tout $x \in \mathcal{U}$, $|||df_x||| \leq M$, alors pour tout $(a,b) \in \mathcal{U}^2$, $\|f(c) - f(b)\|_F \leq M \|c-b\|$.
$*$ Si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe et que pour tout $x \in \mathcal{U}$, $df_x = 0$, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.

Théorème 12 : [Rouvière, p.117]
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions différentiables sur $\mathcal{U}$ dans F.
Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur $\mathcal{U}$ et si pour tout $x \in \mathcal{U}$, la suite $(df_{k,x})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $L_x \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et $df = L$.

Définition 13 : Gradient d'une fonction en un point [Gourdon, p.324] :
On munit E d'une structure d'espace euclidien.
On considère $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a.
L'unique vecteur $v \in E$ tel que $df_a =< v; >_E$ s'appelle **le gradient de f en a** et on le note $\mathrm{grad}(f)_a$.

Remarque 14 : [Rouvière, p.87]
Le gradient est la direction selon laquelle la pente est la plus forte : si a est tel que $\mathrm{grad}(f)_a \neq 0$, alors pour tout $u \in E$ tel que $\|u\|_E = \|\mathrm{grad}(f)_a\|_E$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in]0;\delta[,\ f(x+tu) \leq f(x + t\,\mathrm{grad}(f)_a)$$

I.2 Dérivées partielles

Définition 15 : Dérivée selon un vecteur [Gourdon, p.324] :
On considère $v \in E$.
On dit que f est **dérivable en a selon le vecteur v** lorsque la fonction à variable réelle $\varphi : t \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t = 0$.
On note alors $f'_v(a) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(f(a+tv) - f(a)\right)$.

Proposition 16 : [Gourdon, p.324]
Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a suivant tout vecteur et pour tout $v \in E$, $f'_v(a) = df_a(v)$.

Remarque 17 :
La réciproque de la proposition précédente est fausse en général !
Si l'on considère la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

alors f est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais n'est pas continue en $(0,0)$, donc non dérivable en ce point.

On considère désormais $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, avec $n = \dim(E)$.

Définition 18 : Dérivée partielle en un point [Gourdon, p.325] :
On considère $i \in [\![1;n]\!]$.
On dit que f admet une **dérivée partielle en a d'indice i** lorsque f est dérivable en a selon le vecteur e_i (et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)$).

Définition 19 : Matrice jacobienne en un point [Gourdon, p.327] :
On suppose que f admet une dérivée partielle en a pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.
On appelle **matrice jacobienne de f en a** la matrice (notée Jf_a) définie par :

$$Jf_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{(i,j)\in[\![1;m]\!]\times[\![1;n]\!]},\ \text{avec } m = \dim(F) \text{ et } f = (f_1, ..., f_m)$$

Proposition 20 : [Gourdon, p.325]
Si f est différentiable en a, alors :

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} e_i^* \text{ et } \operatorname{grad}(f)_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} e_i$$

Théorème 21 : [Gourdon, p.325]
Si toutes les dérivées partielles de f existent sur $\mathcal{U}$ et sont continues en $a \in \mathcal{U}$, alors f est différentiable en a.

Remarque 22 : [Gourdon, p.326]
Attention, la réciproque est fausse comme le montre la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

qui est différentiable en 0 mais avec f' n'est pas continue en 0.

I.3 Différentielles d'ordre supérieur

Définition 23 : Application k fois différentiable [Gourdon, p.326]
On suppose que f est différentiable sur $\mathcal{U}$.
$*$ On dit que f est **deux fois différentiable** en a lorsque $df : E \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ est différentiable en a. Dans ce cas, on note $d^2 f_a = d(df)_a$.
$*$ Par récurrence, on dit que f est k **fois différentiable** en a ($k \in \mathbb{N}^*$) lorsque df est $k-1$ fois différentiable en a et on note $d^k f_a = d\left(d^{k-1} f\right)_a$.

Remarque 24 : [Gourdon, p.326]
Si f est deux fois différentiable en a, alors pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ selon le vecteur e_i.

Définition 25 : Fonction de classe $\mathcal{C}^k$ [Gourdon, p.326] :
$*$ On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque f admet des dérivées partielles à l'ordre 1 pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et que ses dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{U}$.
$*$ Par récurrence, on dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^k (k \in \mathbb{N}^*)$ toutes les dérivées partielles à l'ordre 1 pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et que ses dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathcal{U}$.

Théorème 26 : Théorème de Schwarz [Gourdon, p.326] :
Si f est deux fois différentiable en a, alors on a :

$$\forall i,j \in [\![1;n]\!],\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Corollaire 27 : [Rouvière, p.294]
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^p$, alors les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p ne dépendent pas de l'ordre de dérivation.

Définition 28 : Matrice hessienne en un point [Gourdon, p.336] :
On suppose que f est deux fois différentiable en a et $F = \mathbb{R}$.
On appelle **matrice hessienne de** f **en** a la matrice définie par :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j \in [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Remarque 29 :
Par le théorème de Schwarz, la matrice $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

Définition 30 : Laplacien d'une application :
On suppose que toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f existent et que $F = \mathbb{R}$.
On appelle **laplacien de** f l'application $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^2}{\partial x_i^2}$.

Exemple 31 : [Gourdon, p.327]
Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array} \right.$$

La fonction $F = f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

II Théorèmes fondamentaux

II.1 Théorèmes d'inversion

Développement 1 : [cf. GOURDON]

Théorème 32 : Théorème d'inversion locale [Gourdon, p.341] :
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que df_a est inversible, alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a et $\mathcal{W}$ de $f(a)$ tels que :
$*$ $f|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ soit une bijection. $*$ $g = f|_{\mathcal{V}}^{-1} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$ est continue.
$*$ g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathcal{V}$, $dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.

Corollaire 33 : [Gourdon, p.343]
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que pour tout $x \in \mathcal{U}$, df_x soit différentiable, alors f est une application ouverte.

Théorème 34 : Théorème d'inversion globale [Gourdon, p.343] :
Si f est injective et de classe $\mathcal{C}^1$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ Pour tout $x \in \mathcal{U}$, df_x est inversible et bicontinu.
$*$ $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ est un ouvert de F et $f^{-1} : V \longrightarrow \mathcal{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 35 : $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme [Gourdon, p343] :
On considère $k \in \mathbb{N}^*$.
On dit que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme lorsque f est bijective, de classe $\mathcal{C}^k$ et f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple 36 : [Gourdon, p.347]
$*$ L'application $f : (x,y) \longrightarrow (x^2 - y^2, 2xy)$ définie de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, mais pas un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme global.
$*$ Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ est k-contractante ($k \in]0;1[$), alors f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 37 : Fonction strictement monotone [Gourdon, p.350] :
On suppose que $(E, < \cdot ; \cdot >_E)$ est un espace euclidien.
On dit que $g : E \longrightarrow E$ est **strictement monotone** lorsqu'il existe $k > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in E^2$, $< f(x) - f(y); x - y > \geq k \|x - y\|_E^2$.

Proposition 38 : [Gourdon, p.350]
Soit $g : E \longrightarrow E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
$*$ g est strictement monotone si, et seulement si, il existe $k > 0$ tel que pour tout $(x,h) \in E^2$, $< dg_x(h), h >_E \geq k \|h\|_E^2$.
$*$ Si g est strictement monotone, alors g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

II.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 39 : Théorème des fonctions implicites [Gourdon, p.344] :
On suppose que $E = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, ..., f_q) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$ et on écrit $(x,y) = (x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.
S'il existe $(a,b) \in \mathcal{A}$ tel que $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{i,j \in [\![1;q]\!]} \neq 0$, alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}'$ de a, un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de $f(a,b)$, un voisinage ouvert Ω de (a,b) et une application $\varphi : \mathcal{U}' \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que pour tout $(x,z) \in \mathcal{U}' \times \mathcal{W}$, il existe une unique solution y de $f(x,y) = z$ avec $(x,y) \in \Omega$ et on a $y = \varphi(x,z)$.
En particulier, pour tout $(x,z) \in \mathcal{U}' \times \mathcal{W}$, $f(x, \varphi(x,z)) = z$.

Exemple 40 : [Gourdon, p.348]
On considère l'application $f : (x,y) \longrightarrow \sin(y) + xy^4 + x^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Il existe deux voisinages ouverts V et V' de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que pour tout $x \in V$, $\varphi(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(x,y) = 0$ avec $y \in V'$.

II.3 Extrema

On suppose dans toute cette sous-partie que $F = \mathbb{R}$.

Proposition 41 : [Gourdon, p.335]
Si f admet un extremum relatif en a et est différentiable en a, alors $df_a = 0$.

Remarque 42 :
La réciproque de la proposition précédente est fausse en général. En effet, la fonction $x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ admet une dérivée nulle en 0 mais il ne s'agit pas d'un extremum relatif.

Définition 43 : Point critique [Gourdon, p.336] :
On dit que a est un **point critique de** f lorsque f est différentiable en a et que $df_a = 0$.

Théorème 44 : [Gourdon, p.336]
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et que $df_a = 0$, alors :
$*$ Si f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a, alors $H_f(a)$ est positive (resp. négative).
$*$ Si $H_f(a)$ est définie positive (resp. définie négative), alors f admet un minimum (resp. un maximum) relatif en a.

Théorème 45 : Théorème des extrema liés [Gourdon, p.337] :
Soient $f, g_1, ..., g_r$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'ouvert $\mathcal{U}$ de E et $\Gamma = \{x \in \mathcal{U} \text{ tq } g_1(x) = ... = g_r(x) = 0\}$.
Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $c \in \Gamma$ et si $dg_{1,c}, ..., dg_{r,c}$ sont linéairement indépendants, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ (uniques et appelés **multiplicateurs de Lagrange**) tels que $df_c = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_{i,c}$.

Exemple 46 : [Gourdon, p.339]
Il est possible de retrouver l'inégalité arithmético-géométrique à partir du théorème des extrema liés.

III Exemples et applications

III.1 Calcul différentiel dans les espaces de matrices

Développement 2 : [cf. GOURDON]

Proposition 47 : [Gourdon, p.332]

Le déterminant est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(\det)_M(H) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Com}(M)^\intercal H\right)$$

Proposition 48 : [Gourdon, p.341]

Si l'on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2 : M \longrightarrow \left(\sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, alors le groupe des matrices orthogonales directes de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Théorème 49 : [Rombaldi, p.762 + 774]

$*$ L'exponentielle matricielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d\exp_M(H) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!}\left(\sum_{i=0}^{p-1} M^i H M^{p-1-i}\right)$$

$*$ L'exponentielle matricielle est un difféomorphisme local en $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ sur I_n.

III.2 Quelques propriétés sur les fonctions holomorphes et harmoniques

Théorème 50 : Conditions de Cauchy-Riemann [Gourdon, p.334] :

Soit $g : \mathcal{V} \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.
On pose u et v tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.
g est holomorphe si, et seulement si, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Définition 51 : Fonction harmonique [Gourdon, p.334] :

On considère $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que toutes les dérivées partielles d'ordre 2 existent.
On dit que f est **harmonique** lorsque $\Delta f = 0$.

Proposition 52 : [Gourdon, p.334]

Avec les notations du théorème 50, on a :
Si g est holomorphe et u et v de classe $\mathcal{C}^2$, alors u et v sont harmoniques.

Proposition 53 : [Gourdon, p.334]

Soit $u : \mathcal{B}_o(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si u est de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique, alors u est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Théorème 54 : Principe du maximum [Gourdon, p.338] :

Soient $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{B}$ la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$.
Si g est harmonique, alors pour tout $x \in \mathcal{B},\ \min\limits_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max\limits_{\|y\|=1} f(y)$.

III.3 Différentiabilité des fonctions convexes

Dans toute cette sous-partie, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire $< \cdot ; \cdot >$ usuel et de la norme euclidienne associée et on considère C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

Définition 55 : Application α-convexe [Gourdon, p.365] :

On considère $J : C \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que J est une **application α-convexe** ($\alpha \geq 0$) lorsque :

$$\forall x, y \in C,\ \forall \delta \in [0;1],\ J((1-\delta)x + \delta y) \leq (1-\delta)J(x) + \delta J(y) - \frac{\delta(1-\delta)}{2}\alpha \|x-y\|^2$$

Proposition 56 : [Gourdon, p.365]

Soit $J : C \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si J est α-convexe, alors J est convexe (et en particulier J est continue).

Proposition 57 : [Gourdon, p.365]

Soit $J : C \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si J est α-convexe et de classe $\mathcal{C}^1$, alors :

$$\forall (x,y) \in C^2,\ < \mathrm{grad}_y(J) - \mathrm{grad}_x(J); y - x > \geq \alpha \|y-x\|^2$$

Proposition 58 : [Gourdon, p.366]

Soit $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si J est α-convexe, alors il existe un unique $x_0 \in C$ tel que $J(x_0) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} J(x)$.

Remarque 59 :
La proposition précédente permet de justifier l'algorithme du gradient qui sert à minimiser $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

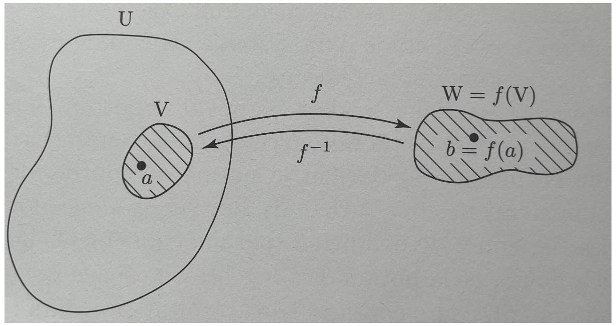
- Initialisation :
  On choisir $v_0 \in \mathbb{R}^n$, un paramètre τ (le pas) et $\varepsilon > 0$.

- Boucle en $k \geq 0$:
  Calculer $\mathrm{grad}_{v_k}(J)$ et poser $d_k = -\,\mathrm{grad}_{v_k}(J)$.
  Si $d_k = 0$, l'algorithme a terminé.
  Sinon, on pose $v_{k+1} = v_k + \tau d_k$ et tant que $|v_{k+1} - v_k| > \varepsilon$, on incrémente k de 1 et on recommence continue la boucle.

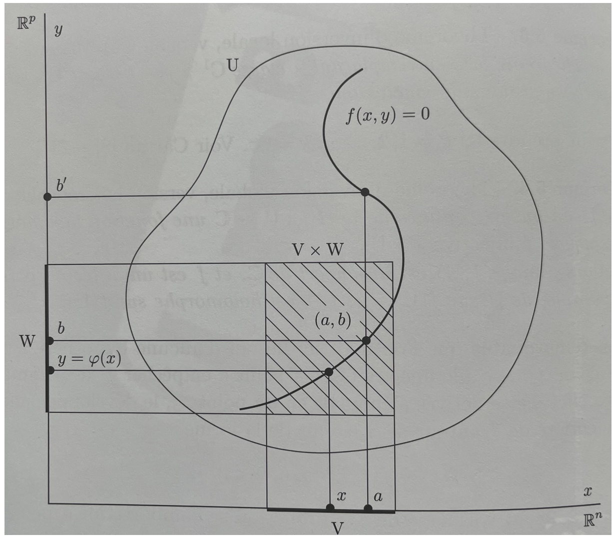
Théorème 60 :
Soit $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application α-convexe telle que $\mathrm{grad}_J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est ℓ-lipschitzienne ($\ell > \alpha$).
Si $\tau \in \left]0; \frac{2\alpha}{\ell^2}\right[$, alors la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par l'algorithme de la méthode du gradient converge vers l'unique solution du problème $J(x_0) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} J(x)$.

IV Annexe

IV.1 Illustration du théorème d'inversion locale



IV.2 Illustration du théorème des fonctions implicites



Remarques sur la leçon

— Il est possible de parler dans cette leçon de géométrie différentielle avec les notions de sous-variétés, de vecteurs et espaces tangents ainsi que de groupes et d'algèbres de Lie.

— On peut également s'intéresser au lemme de Morse ainsi qu'à de la topologie sur les espaces de matrices.

Liste des développements possibles

— Théorème d'inversion locale.

— Matrice minimisant la norme sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Bibliographie

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*.