

Leçon 214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Extrait du rapport de jury

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels cette leçon est consacrée offrent bien sûr une belle utilisation de la complétude, qu'on ne passera pas sous silence. Ils peuvent parfaitement faire l'objet d'un des deux développements. Pour autant, pour traiter l'intégralité du sujet, il faut se garder d'un point de vue trop formel, et proposer des applications significatives aussi bien en analyse qu'en géométrie : étude locale de courbes, de surfaces ou d'intersection de surfaces, problèmes d'optimisation sous contraintes (si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique), régularité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients, etc.

Une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude locale d'applications suffisamment régulières (submersions, immersions, théorème du rang constant, lemme de Morse), au lemme de Sard, ainsi qu'aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 214 intitulée : "Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.". Raisonner à difféomorphisme local près permet d'obtenir une plus grande liberté locale et une flexibilité supérieure, dont on espère pouvoir tirer des informations globales. De plus, c'est en approchant localement des fonctions et des systèmes généraux par des applications linéaires que l'on arrive à obtenir des informations sur les problèmes initiaux.

Dans une première partie, on s'intéresse au théorème d'inversion locale en commençant rapidement par introduire la notion de difféomorphisme, ainsi que quelques exemples. Dans un deuxième point on rentre dans le sujet on s'intéressant au théorème d'inversion locale qui permet de résoudre des équation du type " $y = f(x)$ " et on donne ensuite un corollaire ainsi qu'un exemple. On parle ensuite de $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme local ainsi que d'immersions et de submersions où l'on donne également quelques exemples classiques avant de terminer ce point avec le théorème d'inversion globale. On traite dans un dernier point d'une application via le changement de coordonnées avec les théorèmes 18 et 19 puis ensuite quelques calculs d'intégrales ainsi que la formule du laplacien d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ en polaire.

Dans une deuxième partie on s'intéresse aux fonctions implicites en commençant par avec une première partie sur le théorème des fonctions implicites dont l'intérêt est de trouver une paramétrisation de $f(x, y) = 0$ au voisinage d'un point annulateur. On donne ensuite quelques exemples d'applications de ce théorème avec les exemples 26 à 29 avant de passer au deuxième point où l'on traite de la différentielle de la fonction implicite. On commence par donner l'expression de la différentielle avant de donner plusieurs exemples dont le folium de Descartes ou des solutions approchées d'une équations par exemple. Finalement, un dernier point est consacré aux extrema liés où l'on donne le théorème puis une application avec les matrices minimisant la norme sur $SL_n(\mathbb{K})$.

Enfin, on termine cette leçon avec un dernier point concernant les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. On commence par donner les définitions de base ainsi que des caractérisations avec notamment la définition 37 ainsi que le théorème 39. On donne ensuite des exemples classiques de sous-variétés ainsi qu'une application aux matrices. Dans un deuxième point on parle de l'espace tangent en commençant par introduire la notion de vecteur tangent puis d'espace tangent.

On donne enfin en annexe des illustrations géométriques du théorème d'inversion locale, des fonctions implicites ainsi que du folium de Descartes, d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et de vecteur tangent.

Plan général

I - Inversion locale : définitions, théorème et conséquences

- 1 - Difféomorphismes
- 2 - Théorème d'inversion locale
- 3 - Une application : le changement de coordonnées

II - Fonctions implicites

- 1 - Théorème des fonctions implicites
- 2 - Différentielle de la fonction implicite
- 3 - Extremes liés

III - Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

- 1 - Définitions et caractérisations
- 2 - Espaces tangents

IV - Annexe

- 1 - Illustration du théorème d'inversion locale
- 2 - Illustration du théorème des fonctions implicites
- 3 - Représentation géométrique du folium de Descartes
- 4 - Illustration d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$
- 5 - Illustration de la notion de vecteur tangent

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère p, q et n des entiers naturels non nuls, $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{V}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^q$.

I Inversion locale : définitions, théorème et conséquences

I.1 Difféomorphismes

Définition 1 : $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme [Lafontaine, p.23] :

Une application $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ est un **$\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme** lorsque f est bijective, de classe $\mathcal{C}^k$ et que sa réciproque est également de classe $\mathcal{C}^k$ (on dit alors que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont difféomorphes).

Remarque 2 : [Lafontaine, p.23]

En notant g l'application réciproque d'un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme f , on a en tout point $a \in \mathcal{U}$ que les applications linéaires df_a et $dg_{f(a)}$ sont inverses l'une de l'autre (par le théorème des fonctions composées appliqué à $g \circ f$ et $f \circ g$). En particulier, on a $p = q$.

Exemple 3 : [Lafontaine, p.23]

- * Tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont difféomorphes entre eux et difféomorphes à $\mathbb{R}$.
- * Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne) est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.
- * Dans $\mathbb{R}^2$, l'intérieur d'un carré est difféomorphe à un disque ouvert.

Remarque 4 : [Lafontaine, p.24]

L'exemple de la fonction $t \longmapsto t^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ montre qu'un homéomorphisme lisse peut ne pas être un difféomorphisme. En effet, sa différentielle en 0 n'est pas inversible puisqu'elle est nulle.

Proposition 5 : [Lafontaine, p.24]

Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ un homéomorphisme.

Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et si df est inversible en tout point, alors f est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme et $(df_{f(x)})^{-1} = (df_x)^{-1}$.

I.2 Théorème d'inversion locale

Développement 1 : [cf. GOURDON]

Théorème 6 : Théorème d'inversion locale [Gourdon, p.341] :

Soient $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ et $a \in \mathcal{U}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $df(a)$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert $\tilde{\mathcal{U}}$ de a et $\mathcal{W}$ de $f(a)$ tels que :

* $f|_{\tilde{\mathcal{U}}} : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{W}$ soit une bijection. * $g = f|_{\tilde{\mathcal{U}}}^{-1} : \mathcal{W} \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}$ est continue.

* g est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \tilde{\mathcal{U}}$, $dg_{f(x)} = (df_x)^{-1}$.

Corollaire 7 : [Gourdon, p.343]

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que pour tout $x \in \mathcal{U}$, df_x soit différentiable, alors f est une application ouverte.

Exemple 8 : [Lafontaine, p.25]

Il existe dans $GL_n(\mathbb{R})$ deux ouverts U et V contenant I_n tels que pour toute matrice $B \in V$, il existe une unique matrice $A \in U$ de carré égal à B .

Définition 9 : $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme local [Lafontaine, p.25] :

On appelle **$\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme local** toute application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ dont la différentielle en tout point est inversible.

Remarque 10 : [Lafontaine, p.25]

Une application de classe $\mathcal{C}^k$ dont la différentielle en un point est inversible est un difféomorphisme local d'un voisinage de ce point sur son image.

Exemple 11 : [Lafontaine, p.25]

* L'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ est un difféomorphisme local de $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

* Si l'on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, l'application $z \mapsto z^2$ est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sur lui-même et l'application $z \mapsto e^z$ est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Définition 12 : Immersion [Lafontaine, p.27]

On appelle **immersion** (de classe $\mathcal{C}^k$) de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ une application dont la différentielle est injective en tout point.

Définition 13 : Submersion [Lafontaine, p.27]

On appelle **submersion** (de classe $\mathcal{C}^k$) de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ une application dont la différentielle est surjective en tout point.

Remarque 14 : [Lafontaine, p.25 + 27]

* Si une application f est une immersion, alors $p \leq q$ et si f est une submersion, alors $p \geq q$.

* Une application qui est à la fois une immersion et une submersion est un difféomorphisme local.

* Un difféomorphisme local n'est pas forcément injectif, par contre, tout difféomorphisme local bijectif est un difféomorphisme.

Exemple 15 : [Rouvière, p.208]

La fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local d'un voisinage de $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ sur un voisinage de I_n , mais ce n'est pas un difféomorphisme global de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur son image.

Théorème 16 : Théorème d'inversion globale [Gourdon, p.343] :

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^q$. Si f est injective et de classe $\mathcal{C}^1$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

* Pour tout $x \in \mathcal{U}$, $df(x)$ est inversible et bicontinue.

* $V = f(\mathcal{U})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et $f^{-1} : V \rightarrow \mathcal{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

I.3 Une application : le changement de coordonnées

Définition 17 : Changement de coordonnées [Rouvière, p.189] :

On considère U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On appelle **changement de coordonnées sur U** la donnée de n fonctions $f_1, \dots, f_n$ définies sur l'ouvert U et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que l'application $f : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 18 : Théorème du changement de coordonnées [Rouvière, p.190] :

Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$.

les relations $u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$ définissent un changement de coordonnées sur un voisinage de a si, et seulement si, le jacobien $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est non nul (c'est-à-dire que les formes linéaires $df_1(a), \dots, df_n(a)$ sont linéairement indépendantes).

Théorème 19 : [Rouvière, p.214]

Soit $F : (t, u) \mapsto (f(t, u), g(t, u))$ un changement de coordonnées de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Pour $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et identiquement nulle en dehors d'un compact suffisamment petit, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(F(t, u)) |\det(dF(t, u))| dt du$$

Exemple 20 : [Rouvière, p.215]

Si on a le changement en coordonnées polaire $F : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \varphi(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

Exemple 21 :

On peut par exemple calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ pour $a > 0$.

Exemple 22 : [Gourdon, p.327]

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{cases}$$

La fonction $F = f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et on a :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

II Fonctions implicites

II.1 Théorème des fonctions implicites

Théorème 23 : Théorème des fonctions implicites [Gourdon, p.344] :

On suppose que $E = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $F = \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, \dots, f_q) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathcal{C}^1$ et on écrit $(x, y) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

S'il existe $(a, b) \in \mathcal{A}$ tel que $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b) \right)_{i,j \in \llbracket 1; q \rrbracket} \neq 0$, alors il existe un voisinage

ouvert $\mathcal{U}'$ de a , un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de $f(a, b)$, un voisinage ouvert Ω de (a, b) et une application $\varphi : \mathcal{U}' \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que pour tout $(x, z) \in \mathcal{U}' \times \mathcal{W}$, il existe une unique solution y de $f(x, y) = z$ avec $(x, y) \in \Omega$ et on a $y = \varphi(x, z)$.

En particulier, pour tout $(x, z) \in \mathcal{U}' \times \mathcal{W}$, $f(x, \varphi(x, z)) = z$.

Définition 24 : Fonction implicite au voisinage d'un point [Rouvière, p.192] :

La fonction φ du théorème des fonctions implicites est appelée **fonction implicite définie par f au voisinage du point (a, b)** (et on a en particulier que $\varphi(a) = b$).

Remarque 25 : [Rouvière, p.193]

La signification du théorème des fonctions implicites est que la courbe (ou surface) définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ peut, au moins localement, être vue comme le graphe d'une fonction φ .

Exemple 26 : [Gourdon, p.348]

On considère l'application $f : (x, y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Il existe deux voisinages ouverts V et V' de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que pour tout $x \in V$, $\varphi(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(x, y) = 0$ avec $y \in V'$.

Exemple 27 : [Rouvière, p.193]

Pour l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ et il faut exclure les points où $y = 0$. En prenant $(0, 1)$ ou $(0, -1)$ pour points de départ, on voit que l'équation définit deux fonctions implicites φ_1 et φ_2 correspondant aux demi-cercles supérieur et inférieur :

$$V_1 =]-1; 1[, W_1 =]0; +\infty[\text{ et } y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$V_2 =]-1; 1[, W_2 =]-\infty; 0[\text{ et } y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

Exemple 28 : [Beck, p.11]

On considère $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0 .

Il existe une application φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage U de P_0 à valeurs dans un voisinage V de x_0 telle que :

$$\forall P \in U, \forall x \in V, (x = \varphi(P)) \iff (P(x) = 0)$$

Exemple 29 : [Beck, p.12]

L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.2 Différentielle de la fonction implicite

Théorème 30 : [Rouvière, p.194]

Sous les hypothèses du théorème des fonctions implicites, la fonction implicite φ est différentiable et :

$$\forall x \in \mathcal{U}', d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$$

Exemple 31 : Folium de Descartes [Rouvière, p.237]

On considère $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$.

On peut appliquer le théorème des fonctions implicites à l'ensemble C et on trouve $\varphi'(x) = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$ et l'étude des tangentes à C permet de dessiner C .

Exemple 32 : [Rouvière, p.240]

Le théorème des fonctions implicites permet de donner une solution approchée de l'équation $x^7 + 0,99x - 2,03 = 0$.

II.3 Extrema liés

Théorème 33 : Théorème des extrema liés [Gourdon, p.337] :

Soient $f, g_1, \dots, g_r$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$ et $\Gamma = \{x \in \mathcal{U} \text{ tq } g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

Si $f|_{\Gamma}$ admet un extremum relatif en $c \in \Gamma$ et si $dg_{1,c}, \dots, dg_{r,c}$ sont linéairement indépendants, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ (uniques et appelés **multiplicateurs de Lagrange**) tels que $df_c = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_{i,c}$.

Exemple 34 : [Gourdon, p.339]

Il est possible de retrouver l'inégalité arithmético-géométrique à partir du théorème des extrema liés.

Développement 2 : [cf. GOURDON]

Proposition 35 : [Gourdon, p.332]

Le déterminant est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d(\det)_M(H) = \text{Tr}(\text{Com}(M)^T H)$$

Proposition 36 : [Gourdon, p.341]

Si l'on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2 : M \rightarrow \left(\sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, alors le groupe des matrices orthogonales directes de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

III Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

III.1 Définitions et caractérisations

Définition 37 : Sous-variété de $\mathbb{R}^n$ [Lafontaine, p.28] :

Une partie $M \subseteq \mathbb{R}^n$ est une **sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$** lorsque pour tout $x \in M$, il existe des voisinages ouverts U et V de x et $0_{\mathbb{R}^n}$ et un difféomorphisme $f : U \rightarrow V$ tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

On dit alors que M est de codimension $n - p$ dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 38 :

En d'autres termes, f transforme M en un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p localement via un changement de coordonnées.

Théorème 39 : [Lafontaine, p.29]

Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- * M est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.
- * Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.
- * Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a , un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et une application $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.
- * Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a , un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a^1, \dots, a^p)$ et une application lisse G de V dans $\mathbb{R}^{n-p}$ tels que, après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap M$ soit égal au graphe de G .

Remarque 40 : [Lafontaine, p.30]

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv) est le théorème des fonctions implicites.

Définition 41 : Courbe/surface/hypersurface lisse [Rouvière, p.197]

On appelle **courbe lisse** (respectivement **surface lisse** et **hypersurface lisse**) une sous-variété de dimension 1 (respectivement 2 et $n - 1$) de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 42 :

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est appelée **théorème de submersion**.

Exemple 43 : [Lafontaine, p.30]

- * La sphère S^n définie par $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tq } x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.
- * Le tore T^n défini par $\{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \text{ tq } |z_0^2| + \dots + |z_n^2| = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$.
- * $\text{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.
- * La partie de $\mathbb{R}^3$ définie par $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (cône de révolution) n'est pas une sous-variété.

Proposition 44 :

Le groupe $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$.

III.2 Espaces tangents

Définition 45 : Vecteur tangent [Lafontaine, p.33] :

On dit qu'un vecteur v est un **vecteur tangent** en un point a d'une partie A de $\mathbb{R}^p$ lorsqu'il existe une application différentiable $c :]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que $c(0) = a$ et $c'(0) = v$.

Proposition 46 : [Lafontaine, p.33]

Les vecteurs tangents en un point à une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ forment un sous-espace vectoriel de dimension p .

Définition 47 : Espace tangent [Lafontaine, p.34]

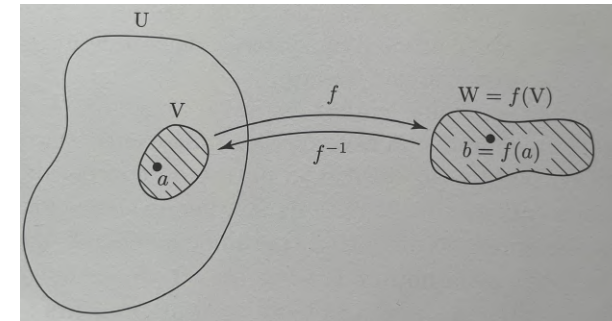
On appelle **espace tangent à une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ en a** (notée $T_a M$), l'ensemble des points m de $\mathbb{R}^n$ tels que le vecteur $m - a$ soit tangent à M en a .

Remarque 48 : [Lafontaine, p.34]

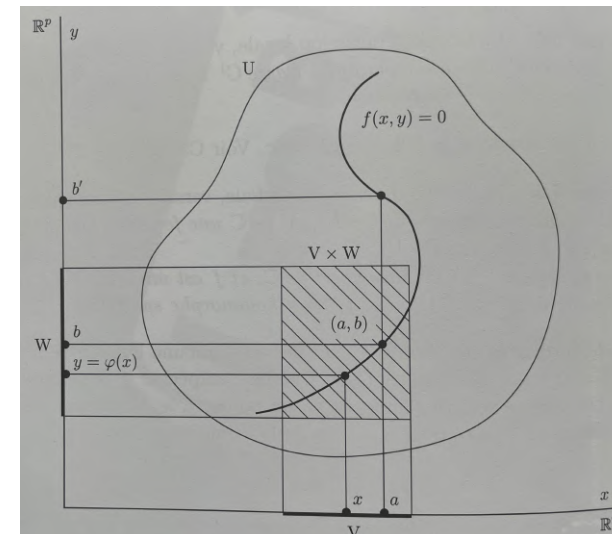
L'espace tangent en a est un sous-espace affine de dimension p de l'espace ambiant. Il devient un espace vectoriel par le choix de a comme origine.

IV Annexe

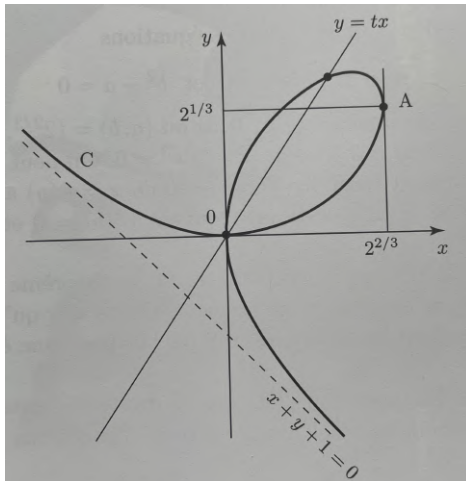
IV.1 Illustration du théorème d'inversion locale



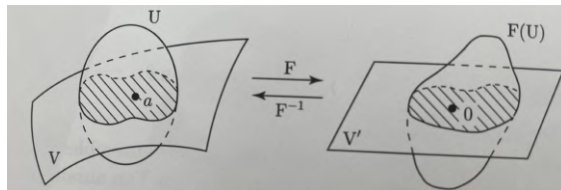
IV.2 Illustration du théorème des fonctions implicites



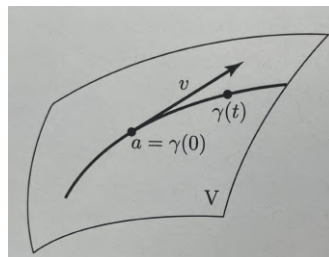
IV.3 Représentation géométrique du folium de Descartes



IV.4 Illustration d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$



IV.5 Illustration de la notion de vecteur tangent



Remarques sur la leçon

- L'inversion locale permet d'avoir des continuités bien peu évidentes en fonction de paramètres : racines de polynômes, etc. Les fonctions implicites permettent de définir localement de nombreuses courbes comme des graphes.
- Il est bon de connaître les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ ainsi que les différentes représentations de l'espace tangent.

Liste des développements possibles

- Théorème d'inversion locale.
- Matrices minimisant la norme sur $SL_n(\mathbb{R})$.

Bibliographie

- Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.
- François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*.
- Vincent Beck, *Objectif agrégation*.