1

NOM : MAURAS   Prénom : Simon   Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 152 - Déterminant. Exemples et Applications

Autre sujet :

Soit A un anneau commutatif unitaire. Soit M un A-module libre de type fini, de rang n et muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On note $\pi_{\mathcal{B}} : M \to A^n$ la projection canonique.

I Définitions et premières propriétés

Def 1 Soit $U = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans A. $\det U = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} u_{i\sigma(i)}$. On appelle déterminant de la matrice U le scalaire $\det(U) \in A$.

Prop 2 Pour toute matrice $U \in \mathcal{M}_n(A)$, $\det(U) = \det({}^tU)$

Def 3 Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$,
$$\det(x_1, \dots, x_n) = \det\left((\pi_{\mathcal{B}}(x_j)_i)_{1 \leq i,j \leq n} \right)$$

Def 4 La fonction $f : M^n \to A$ est...

- une forme n-linéaire si chacune de ses applications partielles est A linéaire
- symétrique si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in M^n$ $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$
- antisymetrique si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in M^n$ $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$
- alternée si $\forall (x_1, \dots, x_n)$ $\exists i \neq j,\ x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0$

Prop 5 Pour toute forme n-linéaire, alterné implique antisymetrique. La réciproque est vraie si 2 est inversible.

Prop 6 $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée.

Prop 7 Toute forme n-linéaire alternée f s'écrit
$$f = f(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}$$

Corollaire 8 $\{\det_{\mathcal{B}}\}$ est une base des formes n-linéaires alternées

Def 9 Soit u un endomorphisme de M. Le déterminant de u est l'unique scalaire $\det(u)$ tel que pour toute forme n-linéaire alternée f et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$
$$f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) f(x_1, \dots, x_n)$$

Remarque 10 Pour $f = \det_{\mathcal{B}}$ et $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$
$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(u)$$

Prop 11 Pour tout endomorphismes u et v on a
$$\det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det(u)\det(v)$$

Corollaire 12 Pour tout $U, V \in \mathcal{M}_n(A)$
$$\det(UV) = \det(VU) = \det(U)\det(V)$$

II Méthodes de calcul

Lemme 13 Soit $U \in \mathcal{M}_p(A)$, $V \in \mathcal{M}_q(A)$, $W \in \mathcal{M}_{pq}(A)$
$$\det\begin{pmatrix} U & W \\ 0 & V \end{pmatrix} = \det(U)\det(V)$$

Théorème 14 Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficient diagonaux. Il est inversible si et seulement si tous ceux ci sont inversibles.

Corollaire 15 On peut calculer de manière effective le déterminant avec l'algorithme de Gauss. (Produit à gauche par des matrices de transvection, dilatation et transposition, cf Figure 1)

Def 16 Soit $U = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(A)$. On note U_{ij} la matrice U en ayant retiré la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne. Les $\det(U_{ij})$ sont les cofacteurs, $\mathrm{com}\, U = (\det U_{ij})_{ij}$ est la comatrice

Théorème 17 Pour toute matrice $U \in \mathcal{M}_n(A)$
$$U \times {}^t\mathrm{com}\, U = {}^t\mathrm{com}\, U \times U = \det(U) I_n$$

Corollaire 18 Développement par rapport à une ligne / colonne

Application 19 Déterminant d'une matrice de Vandermonde (cf Fig 2)

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in A^n$, $\quad \det(\text{Vandermonde}(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$

Application 20 Déterminant d'une matrice de Cauchy (cf Fig 3)

$\forall (a_i) \in \mathbb{C}^n \ \forall (b_j) \in \mathbb{C}^n$ $(a_i + b_j \neq 0)$ $\quad \det\left(\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{ij}\right) = \frac{\prod_{i<j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$

Prop 21 Avoir un déterminant inversible est nécessaire et suffisant :
- Pour qu'une matrice soit inversible
- Pour qu'un endomorphisme soit inversible
- Pour qu'une famille de vecteurs soit une base.

Prop 22 Formules de Cramer. Soit $U \in \mathcal{M}_n(A)$, $X = (x_i)_i$, $Y \in A^n$

Si $\det(U)$ inversible le système $UX = Y$ admet une unique solution

$x_i = \det(U_i) \det(U)^{-1}$ $\quad U_i$ = matrice U en remplaçant la i-ème colonne par Y.

III Déterminant et Polynôme

Prop 23 Le déterminant est un polynome en les coefficients de la matrice. Si $A = A'[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ avec A' un anneau commutatif unitaire, on a $\det((x_{ij})_{i,j}) \in A$.

a) Continuité

Dans cette sous partie, A est un anneau topologique.

Prop 24 Le déterminant et le passage à l'inverse sont continus

Prop 25 Si $A = \mathbb{K}$ est un corps, $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert, $SL_n(\mathbb{K})$ est fermé.

b) Résultant

Dans cette sous partie, A est un anneau intègre. Soit $P, Q \in A[X]$

$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \qquad Q = \sum_{j=0}^{m} b_i X^i$

On définit $\varphi : \begin{cases} A_{m-1}[X] \times A_{n-1}[X] \longrightarrow A_{n+m-1}[X] \\ (U, V) \longmapsto UP + QV \end{cases}$

Prop 26 L'application φ est linéaire, sa matrice dans les bases canoniques est une matrice de Sylvester (cf Figure 4)

Def 27 Le résultant de P et Q est $\operatorname{Res}(P, Q) = \det(\varphi)$

Théorème 28 Il existe U, V tels que $UP + VQ = \operatorname{Res}(P, Q)$.

Application 29 Intersection entre $\mathcal{C}_1 : X^2 - XY + Y^2 - 1 = 0$
$\mathcal{C}_2 : 2X^2 + Y^2 - Y - 2 = 0$

Application 30 Le produit et la somme de deux nombres algébriques est algébrique.

Def 31 On appelle discriminant de P le résultant $\operatorname{Res}(P, P')$

Prop 32 Dans un anneau principal, $\operatorname{Res}(P, Q)$ est inversible si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

Application 33 Racines doubles d'un polynôme dans un corps algébriquement clos.

c) Polynôme caractéristique

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Def 34 Le polynome caractéristique d'une matrice U est $\chi_U = \det(U - XI_n)$

Le polynome caractéristique d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.

Prop 35 Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme u alors $\chi_u(\lambda) = 0$

Théorème 36 (Cayley Hamilton)

Pour tout endomorphisme u, χ_u s'annule en u.

Théorème 37 (Lemme des Noyaux) Soit u un endomorphisme. Soit $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes premiers entre eux 2 à 2.

$$\mathrm{Ker}\left[\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)(u)\right] = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\,[P_i(u)]$$

Corollaire 38 Critère de diagonalisabilité / trigonalisabilité

Def 39 Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on note C_P sa matrice compagnon (cf Fig 5). On a alors $\chi_{C_P} = P$

Application 40 Equation différentielle $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

Application 41 Suite récurrente $u_{n+3} = 7u_{n+1} + 6u_n$

IV) Déterminant et mesures

a) Volumes

Dans cette sous partie, on note μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On suppose connues les définitions classiques des théories de l'intégration et de la différentiabilité

Prop 42 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable

$$\mu(u(X)) = |\det u|\, \mu(X)$$

Prop 43 Le parallélépipède P engendré par les vecteurs a pour volume $\mu(P) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$

Théorème 44 (Changement de variable). Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application injective et différentiable sur $\mathcal{U}$. Alors $\mathcal{V} = \varphi(\mathcal{U})$ est mesurable et une fonction f appartient à $L^1(\mathcal{V})$ ssi la fonction $|\det d\varphi|\, f \circ \varphi$ est dans $L^1(\mathcal{U})$. Dans ce cas

$$\int_{\mathcal{V}} f(x)\,dx = \int_{\mathcal{U}} f(\varphi(y))\,|\det d\varphi(y)|\,dy$$

Application 45 Calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ via un changement de variable polaire.

b) Distances

Soit E un espace pré-hilbertien sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), muni de $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Def 46 On définit la matrice de Gram d'une famille de vecteurs

$MG(v_1, \dots, v_n) = (\langle v_i | v_j \rangle)_{i,j}$ (cf figure 6)

Le déterminant de Gram est la quantité :

$$G(v_1, \dots, v_n) = \det(MG(v_1, \dots, v_n))$$

Prop 47 Soit $v_1, \dots, v_n$ une famille libre de E. Pour tout $x \in E$ on note d la distance de x à $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$

$$d^2 = \frac{G(v_1, \dots, v_n, x)}{G(v_1, \dots, v_n)}$$

Remarque 48 Dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique, on peut interpréter la proposition précédente par :

"volume = base × hauteur"

Application 49 (Théorème de Müntz) Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_0^1 fg$ et de la norme euclidienne associée. Soit $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. On note $E = \mathrm{Vect}_{i \in \mathbb{N}}(x \mapsto x^{\alpha_i})$

$$\overline{E} = \mathcal{C} \iff \sum_{i \geq 0} \frac{1}{\alpha_i} \text{ diverge}$$

$$\begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice de transvection

$i \neq j \quad \lambda \in A$

$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

$$\begin{array}{c c} & i \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice de dilatation

$\lambda \in A$

$L_i \leftarrow \lambda L_i$

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} i & & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice de transposition

$i \neq j$

$L_i \longleftrightarrow L_j$

Figure 1 Produit à gauche, Pivot de Gauss

$(x_1, \dots, x_n) \in A^n$

$$\mathrm{Vandermonde}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Figure 2 Matrice de Vandermonde

$(a_i) \in \mathbb{C}^n \quad (b_j) \in \mathbb{C}^n$

$a_i + b_j \neq 0 \quad (\forall i,j)$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}$$

Figure 3 Matrice de Cauchy

$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad Q = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$

$$\mathrm{Sylvester}(P,Q) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_n & & a_0 & b_m & & b_0 \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & a_n & & & b_m \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\hphantom{a_0 \; \ddots \; a_0}}_{m} & \underbrace{\hphantom{b_0 \; \ddots \; b_0}}_{n} \end{matrix} \end{array}$$

Figure 4 Matrice de Sylvester

$(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$\mathrm{Compagnon}(a_0, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Figure 5 Matrice Compagnon

$(v_1, \dots, v_n) \in E^n$

$$MG(v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} \langle v_1 | v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1 | v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n | v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n | v_n \rangle \end{pmatrix}$$

Figure 6 Matrice de Gram

Références

- BECK, MALICK, PEYRÉ, *Objectif Agrégation*, 4.4
- RAMIS, DESCHAMPS, ODOUX, *Cours de Mathématiques 1*. 10.2
- GOURDON, *Analyse*. p144, p286
- FRANCINOU, GIANELLA, NICOLAS
  Oraux X-ENS, Algèbre 1, p182
  Oraux X-ENS, Algèbre 2, chap 1
- APERY. *Élimination le cas d'une variable*