

LEÇON N° 205 : ESPACES COMPLETS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

On considère (X, d) un espace métrique.

I/ Généralités sur la complétude.

A/ Suites de Cauchy. [G]

Définition 1 : Suites de Cauchy.

Proposition 2 : Une suite convergente est de Cauchy, une suite de Cauchy est bornée, si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence alors elle converge.

Définition 3 : Espaces complets.

Exemple 4 : $\mathbb{R}^n$ est complet.

Remarque 5 : La complétude dépend de la norme.

Contre-exemple 6 : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet (considérer la méthode de Héron pour approximer $\sqrt{2}$).

B/ Propriétés des espaces complets. [G]

Théorème 7 : Complété d'un espace métrique.

Exemple 8 : $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ mais faire attention à la définition (il faut considérer la notion de limite dans $\mathbb{Q}$ pour éviter les boucles logiques). $\hat{\mathcal{P}} = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ où $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$.

Proposition 9 : Toute partie complète est fermée, tout fermé d'un complet est complet.

Proposition 10 : Le produit cartésien de complets est complet.

Théorème 11 : Théorème des fermés emboîtés.

II/ Exemples d'espace vectoriels normés complets.

A/ Espaces de Banach. [G]

On considère ici E et F deux evn.

Définition 12 : Banach

Théorème 13 : Tout evn de dimension finie est complet.

Proposition 14 : Si F Banach alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un Banach, $(C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach.

Proposition 15 : (X, d) est complet si et seulement si toute série absolument convergente converge.

Application 16 : L'exponentielle matricielle est bien définie.

Application 17 : Lemme de Von-Neumann + $\text{GL}(E)$ est un ouvert.

B/ Espaces $L^p(\mu)$. [BP] [BREZ]

On considère ici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 18 : Espaces L^p et L^∞ avec les normes associées.

Proposition 19 : Inégalité de Hölder.

Corollaire 20 : Inégalité de Minkowski.

Définition 21 : Les espaces $L^p(\mu)$ sont des evn.

Développement 1

Théorème 22 : Riesz-Fischer : $L^2(\mu)$ est un Banach

Remarque 23 : $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert.

C/ Espaces de Hilbert. [HL]

Définition 24 : Espace préhilbertien, produit scalaire.

Définition 25 : Espace de Hilbert.

Exemple 26 : Tout espace préhilbertien de dimension finie est de Hilbert, $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est de Hilbert.

Développement 2.a)

Théorème 27 : Théorème de projection sur un convexe fermé.

Corollaire 28 : Si $C = F$ sev fermé alors $H = F \oplus F^\perp$.

Application 29 : Existence et unicité espérance conditionnelle.

Application 30 : Lemme de séparation d'un point et d'un convexe fermé et enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.

Développement 2.b)

Corollaire 31 : Théorème de représentation de Riesz.

Application 32 : Existence adjoints dans un Hilbert.

III/ Utilisation de la complétude.

A/ Prolongement d'applications. [G] [GW]

Théorème 33 : Si E, F métriques, A dense dans E , $f : A \rightarrow F$ uniformément continue, il existe un unique prolongement uniformément continue.

Corollaire 34 : Pareil pour pour linéaire continue avec evn et F Banach.

Définition 35 : Espace de Schwarz.

Proposition 36 : $S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 37 : Formule de Fourier-Plancherel dans $S(\mathbb{R})$.

Application 38 : $\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{2\pi}}$ est une isométrie.

B/ Théorème de point fixe. [G]

Théorème 39 : Théorème de point fixe de Banach-Picard.

Remarque 40 : Faux si seulement $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ considérer sur $\mathbb{R}$ $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ (Mais vrai si X compact).

Corollaire 41 : Si f^r est k -contractante avec $0 < k < 1$ alors f admet un unique point fixe.

Corollaire 42 : Point fixe à paramètres.

Application 43 : Théorème de Cauchy-Lipschitz avec hypothèse globalement lipschitzien.

Exemple 44 : Existence et unicité de la solution de l'équation différentielle $Y'(t) = AY(t)$ avec $Y(t_0) = Y_0$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 20-27 et p. 48-50
- [BP] Briane-Pagès Théorie de l'intégration 4ème éd. p. 153
- [BREZ] Brézis Analyse fonctionnelle p. 57
- [HL] Hirsch-Lacombe Éléments d'analyse fonctionnelle p. 84-96
- [GW] Gasquet-Witowski Analyse de Fourier p. 141 et p. 158