

LEÇON N°204 : CONNEXITÉ. EXEMPLES D'APPLICATIONS.

Dans toute la suite on notera (X, d) un espace métrique.

I/ Espaces connexes.

A/ Définitions et propositions. [G] [Q]

Proposition 1 : Propositions équivalentes et définition de la connexité.

Remarque 2 : La définition pour n'importe quel choix de discret.

Application 3 : Si X connexe et g_1, g_2 continues alors si $e^{2i\pi g_1} = e^{2i\pi g_2}$ alors $g_1 - g_2$ est constante.

Exemple 4 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont connexes, $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe, les convexes de $\mathbb{R}$ sont connexes.

Lemme 5 : Passage des douanes.

Théorème 6 : L'image continue d'un connexe est connexe.

Application 7 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Théorème 8 : Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

B/ Propriétés de stabilité. [G] [Q]

Proposition 9 : Si A est connexe et B telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ alors B est connexe.

Corollaire 10 : L'adhérence d'un connexe est connexe.

Proposition 11 : Stabilité de la connexité par l'union si l'intersection est non vide.

Remarque 12 : L'intersection de connexes n'est en général pas connexe (prendre une droite et un cercle), l'union de connexes n'est en général pas connexe (prendre deux boules disjointes).

Proposition 13 : Le produit cartésien de connexes est connexe.

C/ Composantes connexes. [G]

Proposition 14 : La relation $x\mathcal{R}y \iff \exists C$ connexe tel que $x \in C$ et $y \in C$ est une relation d'équivalence.

Définition 15 : Une classe d'équivalence pour la relation est une composante connexe.

Proposition 16 : Partition de l'espace et les composantes connexes sont fermées.

Proposition 17 : Si il y a un nombre fini de composantes connexes alors elles sont ouvertes.

Exemple 18 : $O_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes : $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

D/ Connexité par arcs. [G] [Q]

Définition 19 : Chemin.

Définition 20 : Connexité par arcs.

Théorème 21 : Connexe par arc $\implies$ connexe.

Remarque 22 : Utile pour montrer la connexité, de plus c'est une notion topologique.

Exemple 23 : Boule unité fermée est connexe et convexe implique connexe par arcs.

Contre-exemple 24 : $\overline{\{(x, \sin(1/x)), 0 < x \leq 1\}}$ est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

Théorème 25 : Si E est un $\mathbb{R}$ -ev alors une partie Ω ouverte est connexe par arcs si et seulement si elle est connexe.

II/ Applications de la connexité en Analyse.

A/ En analyse réelle. [G]

Théorème 26 : Théorème des valeurs intermédiaires.

Application 27 : Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ admet un point fixe.

B/ En calcul différentiel. [PGCD]

Théorème 28 : Inégalité des accroissements finis.

Corollaire 29 : Si dans connexe la différentielle s'annule alors la fonction est constante dans le connexe.

Développement 1

Théorème 30 : Interversion limite-différentielle dans un connexe.

Application 31 : L'exponentielle matricielle est C^1 et calcul de sa différentielle.

C/ En analyse complexe. [T] [OBJ]

Lemme 32 : Ouvert connexe de $\mathbb{C}$ = ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$.

Théorème 33 : Théorème des zéros isolés dans un espace connexe.

Corollaire 34 : Théorème du prolongement analytique.

Application 35 : Prolongement méromorphe de la fonction Γ sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

Théorème 36 : Principe du maximum.

D/ Dans les espaces de matrice. [FGNAlg2] [ZAV]

Développement 2

Lemme 37 : $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs.

Théorème 38 : L'exponentielle matricielle est surjective sur $\mathbb{C}$.

Corollaire 39 : $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{M^2, M \in GL_n(\mathbb{R})\}$

Corollaire 40 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Proposition 41 : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe mais admet deux composantes connexes $GL_n^+(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_*^-)$.

Proposition 42 : $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 38-47
- [Q] Queffélec Topologie p. 113-127
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 96 et p. 109
- [T] Tauvel Analyse complexe pour la licence p. 52
- [OBJ] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation p. 82
- [FGNAlg2] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 2 p. 177
- [ZAV] Zavidovique Un max de maths p. 48