

LEÇON N°203 : UTILISATION DE LA NOTION DE COMPACTITÉ.

Dans toute la suite, on prendra (E, d) un espace métrique et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I/ Notion de compacité.

A/ Propriété de Borel-Lebesgue. [G]

Définition 1 : Définition compact par BL.

Exemple 2 : Tout espace métrique fini est compact, $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Proposition 3 : Un espace métrique compact est borné.

Proposition 4 : (E, d) compact si et seulement si pour toute intersection de fermés vide il existe une sous-famille finie de fermés d'intersection vide.

Corollaire 5 : Si $(F_n)_n$ suite décroissante de fermés non vides alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Proposition 6 : Une réunion finie de compacts est compacte.

Proposition 7 : Une intersection de compacts est compacte.

Proposition 8 : Si $x_n \rightarrow l$ alors $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un compact.

B/ Propriété de Bolzano-Weierstrass. [G] [CAL]

Définition 9 : Compact selon Bolzano-Weierstrass.

Exemple 10 : Les segments de $\mathbb{R}$ sont compacts.

Théorème 11 : Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.

Corollaire 12 : E compact $\iff$ toute suite de E admet une valeur d'adhérence.

Théorème 13 : Théorème de Tychonov.

Proposition 14 : Un espace compact est complet.

Proposition 15 : Dans un compact $(x_n)_n$ admet une unique valeur d'adhérence $l \iff (x_n)_n$ converge vers l .

Application 16 : La décomposition polaire est un homéomorphisme.

Application 17 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

II/ Compacité et applications continues.

A/ Résultats généraux. [G]

Proposition 18 : L'image continue d'un compact est compacte.

Proposition 19 : Si $f : (E, d) \rightarrow F$ avec F métrique et E compact, f continue et bijective alors f est un homéomorphisme.

Application 20 : $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

Proposition 21 : Théorème de la borne atteinte.

Remarque 22 : Avec le théorème des valeurs intermédiaires on a donc l'image d'un segment est un segment.

Théorème 23 : Théorème de point fixe dans un compact : si K compact et $f : K \rightarrow K$ continue telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ alors f admet un unique point fixe.

Remarque 24 : Faux si on suppose juste complet : considérer $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$

Théorème 25 : Théorème de Heine.

Exemple 26 : Exemples de fonctions uniformément continues.

B/ Le cas de $\mathbb{R}$ et des fonctions réelles. [R]

Théorème 27 : Théorème de Rolle.

Exemple 28 : Si la fonction f s'annule en $n+1$ points alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Contre-exemple 29 : Vrai uniquement si à valeurs dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto e^{it}$ est telle que $f(0) = f(2\pi)$ mais sa dérivée ne s'annule jamais.

Corollaire 30 : Inégalité des accroissements finis.

III/ Compacité dans les evns.

A/ Le cas de la dimension finie. [G]

Développement 1.a)

Lemme 31 : Pour tout E $\mathbb{K}$ -ev, les fermés bornés de $(E, \|\cdot\|_{\infty, E})$ sont compacts.

Théorème 32 : Équivalence des normes en dimension finie.

Corollaire 33 : Toute application linéaire d'un evn de dimension finie vers un evn quelconque est continue.

Corollaire 34 : Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont les fermés bornés.

Exemple 35 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Développement 1.b)

Théorème 36 : Théorème de Riesz.

Application 37 : Les compacts en dimension infinie sont d'intérieur vide.

Exemple 38 : $B_{\mathbb{R}[X]}(0, 1)$ n'est pas compact car $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie en temps que $\mathbb{R}$ -ev.

B/ En dimension infinie : approximation uniforme. [HL]

Théorème 39 : Premier théorème de Dini.

Développement 2

Application 40 : Il existe une suite de polynôme CVU vers $|\cdot|$ sur $[-1, 1]$.

Théorème 41 : Théorème de Stone-Weierstrass.

Corollaire 42 : Densité (uniforme) des polynômes dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Application 43 : Si f continue telle que pour tout n , $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ alors $f = 0$.

Corollaire 44 : Densité (uniforme) des polynômes trigonométriques dans $C_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

C/ En dimension infinie : Ascoli. [HL]

Définition 45 : Équicontinue en un point et uniforme équicontinuité.

Proposition 46 : $C(X)$ équicontinue si et seulement si uniformément équicontinue.

Théorème 47 : Théorème d'Ascoli.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 27-38 et p.47
- [HL] Hirsch-Lacombe Éléments d'analyse fonctionnelle p. 26-31 et p. 38
- [CAL] Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 201 et p. 208
- [R] Rombaldi Éléments d'analyse réelle p. 251