

LEÇON N° 201 : ESPACES DE FONCTIONS. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Soient X un ensemble et E un evn.

I/ Espaces de fonctions continues. [EA]

A/ Fonctions continues et convergence. [EA]

Définition 1 : CVS et CVU.

Exemple 2 : $x \mapsto x^n$ CVS mais pas uniformément.

Proposition 3 : CVU $\implies$ CVS.

Définition 4 : $C_b(X, E)$ espace de fonctions bornées.

Proposition 5 : CVU et stabilité de la continuité.

Théorème 6 : Théorème de double limite.

Théorème 7 : $(C_b(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

B/ Fonctions continues sur un compact. [G] [HL]

Proposition 8 : L'image continue d'un compact est compact.

Contre-exemple 9 : Ce n'est pas vrai pour l'image réciproque : $\sin^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$ n'est pas compact.

Théorème 10 : Théorème de la borne atteinte.

Théorème 11 : Premier théorème de Dini.

Développement 1.a)

Application 12 : Existence d'une suite de polynôme convergeant uniformément vers $|\cdot|$ sur $[-1, 1]$.

Théorème 13 : Théorème de Heine.

Corollaire 14 : Deuxième théorème de Dini.

Définition 15 : Espace équicontinu.

Théorème 16 : Théorème d'Ascoli.

C/ Densité de familles de fonctions. [HL] [WIL]

Développement 1.b)

Théorème 17 : Théorème de Stone-Weierstrass.

Application 18 : L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$ est dense.

Application 19 : Si $a < b$, pour tout $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ telle que (P_n) converge uniformément vers f .

Application 20 : Si f est telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b t^n f(t) dt = 0$ alors $f = 0$.

Proposition 21 : La fonction de Weierstrass est une fonction continue partout et nulle part dérivable.

Application 22 : L'ensemble des fonctions continues partout nulle part dérivable est dense dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

II/ Espaces de fonctions Lebesgue-intégrale.

A/ Définitions et propriétés. [BP] [BREZ]

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré.

Définition 23 : Les espaces L^p avec leurs normes associées.

Proposition 24 : Inégalité de Hölder.

Corollaire 25 : Inégalité de Minkowski.

Proposition 26 : $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Développement 2

Théorème 27 : Riesz-Fischer : $L^p(\mu)$ est complet.

Proposition 28 : Inclusions des $L^p(\mu)$ si mesure finie.

Remarque 29 : $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert.

B/ Convolution et régularisation. [BP]

Définition 30 : Convolution L^1 - L^1 et L^1 - L^p .

Proposition 31 : $(L^1, +, \cdot, *)$ est une $\mathbb{K}$ algèbre commutative sans unité.

Définition 32 : Approximation de l'unité.

Exemple 33 : Noyau de Gauss.

Théorème 34 : Régularisation par approximation unité.

Corollaire 35 : C_c^∞ est dense dans L^p .

Application 36 : $S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

C/ Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$. [GW]

Définition 37 : Définition de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$.

Exemple 38 : Transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[a,b]}$.

Lemme 39 : Riemann-Lebesgue.

Proposition 40 : $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ est linéaire continue.

Proposition 41 : Formule de dualité.

Proposition 42 : Lien entre convolution et transformée de Fourier.

Théorème 43 : Formule d'inversion de Fourier.

Corollaire 44 : La transformée de Fourier est injective.

Références :

- [EA] El Amrani Suites et séries de fonctions p. 139
- [G] Gourdon Analyse p. 31 et p. 228
- [HL] Hirsch-Lacombe Éléments d'analyse fonctionnelle p. 26-31 et p. 38
- [BP] Briane-Pagès Théorie de l'intégration 4ème éd. p. 153 et p. 259
- [BREZ] Brézis Analyse fonctionnelle p. 57
- [WIL] Willem Analyse fonctionnelle p. 130
- [GW] Gasquet-Witowski Analyse de Fourier p. 128-135