

Leçon 224: Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions

Références: Gourdon, Rombaldi, Demaëilly
(Ana. Réelle) (Euler-Maclaurin)

I - Comparaison de suites et de fonctions

- 1) Relations de comparaison
- 2) Développements limités
- 3) Développements asymptotiques

II - Exemples de développements asymptotiques de suites

- 1) Séries numériques
- 2) Suites récurrentes

III - Exemples de développements asymptotiques de fonctions

- 1) Fonctions définies par une intégrale
- 2) Fonctions définies par la somme d'une série
- 3) Application aux tangentes et asymptotes

DEV 1: Formule d'Euler-Maclaurin et série harmoniques

DEV 2: Arctan itérés

Leçon 22: Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

I - Comparaison de suites et de fonctions

1) Relations de Comparaison [Gou] [Ror]

DEF 1: Soit (X, d) un espace métrique. Soient $f, g: D \subset X \rightarrow E$ et $x_0 \in D$ un point d'accumulation.

On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 lorsque

$$\exists C > 0, \exists V \in V(x_0), \forall x \in V \cap D, \|f(x)\| \leq C \|g(x)\|$$

On note alors $f(x) = O(g(x))$

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 lorsque: $\forall \varepsilon > 0, \exists V \in V(x_0), \forall x \in V \cap D, \|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|$

On note alors $f(x) = o(g(x))$

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 lorsque $f(x) - g(x) = o(g(x))$. On note alors $f(x) \sim g(x)$.

REM 2: Les notations o, O sont appelées notations de Landau.

REM 3: Ceci est également valable pour des suites en prenant $X = \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $x_0 = +\infty$.

PROP 4: Les définitions de $o, O, \sim$ se reformulent ainsi:

$$f(x) = O(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de } x_0.$$

$$f(x) = o(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$$

$$f(x) \sim g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1.$$

PROP 5: On a les propriétés suivantes:

• o et O sont stables par somme

• o, O et $\sim$ sont stables par produit et puissance.

REM 6: $\sim$ n'est pas stable par somme! $x+2 \sim x$, $-x \sim -x$ mais $x+2 \not\sim -x$

EX 7: $\forall \alpha > 0, \ln(x) = o(x^\alpha)$

• $\forall \alpha, \beta, \gamma > 0, \ln(x)^\alpha = o(x^\beta)$ et $x^\beta = o(e^{\gamma x})$ (croissances comparées)

2) Développements limités [Gou] [Ror] Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non trivial.

DEF 9: Soit $f: I \rightarrow E, 0 \in I$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 lorsque il existe $a_0, \dots, a_n \in E$ tels que, au voisinage de 0 ,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

REM 9: On définit les développements limités au voisinage de $a \in I$ en remplaçant x par $x-a$.

PROP 10: Si f admet un $DL_n(a)$, il est unique.

PROP 11: f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a . Dans ce cas, $f(x) = f(a) + o(1)$

• f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a et alors: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$

REM 12: L'existence d'un développement limité d'ordre $n \geq 2$ assure par l'existence d'une dérivée n -ième!

$$f: x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1+x+x^2+x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pourtant, $f(x) = 1+x+x^2+o(x^2)$. Par contre, on a:

THM 13: (Taylor-Young) Si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en a , elle admet alors au voisinage de a un DL_n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

EX 14: On obtient ainsi le DL_0 de certaines fonctions usuelles:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha}{k} \frac{1}{(k-1)!} (x-0)^{k-1} + o(x^n) \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

PROP 15: Soit $f: I \rightarrow E, n \geq 2$ fois dérivable en $0 \in I$. Si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n), \text{ alors}$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + na_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

PROP 16: Soit $f: I \rightarrow E$ ($0 \in I$) dérivable sur I telle que

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

$$\text{Alors } f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

EX 17: En intégrant le DL de $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^{n+1})$ on obtient $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^{n+1})$.
De même, en intégrant $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+2})$ on obtient $\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+3})$.

PROP 18: Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{E}$ ($\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telles que $f(x) = P_n(x) + o(x^m)$ et $g(x) = Q_m(x) + o(x^m)$. Alors:
- $f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_m(x) + o(x^m)$
- ($\mathbb{E}$ algèbre normée), $fg(x) = R_m(x) + o(x^m)$ où R_m est le reste de la division euclidienne de $P_n Q_m$ par x^{m+1} .
- Si $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $g(0) = Q(0) \neq 0$, $\frac{f}{g}(x) = R_m(x) + o(x^m)$ où R_m est le quotient de la division selon les puissances croissantes de P_n par Q_m .

PROP 19: Soient $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{E} = \mathbb{R}$) admettant un DL en 0 et $f: I \rightarrow \mathbb{E}$ ($g(I) \subset J$) admettant un DL en $g(0)$.
 $g(x) = g(0) + P_m(x) + o(x^m)$ et $f(g(x)) = Q_n(t) + o(t^m)$ où $P_m(0) = 0$. Alors $f \circ g$ admet un DL en 0:
 $f(g(x)) = R_m(x) + o(x^m)$ où R_m est le reste de la division euclidienne de $P_m \circ Q_n$ par x^{m+1} .

EX 20: On a les DL suivants obtenus par composition:
 $f(x) = \sin(\ln(x)) - \ln(\sin(x)) = -\frac{1}{45}x^7 + \frac{1}{1575}x^{11} + o(x^{14})$
 $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^7)$
 $\ln(\cos(x)) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^7)$

EX 21: Soit $f: x \in]-1, +\infty[\mapsto x + \ln(1+x)$. Soit h l'écriture de f sur $\mathbb{R}$. En écrivant: $f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ on a en comparant et en identifiant: $f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + o(y^3)$.
 $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{192} + o(x^3)$.

3) Développement asymptotiques [COV]

DEF 22: Soit X un espace métrique et $x_0 \in X$. On appelle échelle de comparaison un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au voisinage de x_0 dans X sauf éventuellement en x_0 vérifiant: si $f, g \in \mathcal{E}$, alors $f = g$ ou $f = o(g)$ ou $g = o(f)$.

EX 23: Au voisinage de $+\infty$ pour les fonctions de la variable réelle, les échelles de comparaison les plus courantes sont:

- celles constituées des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- celles du type $x^\alpha \ln(x)$
- celles du type $x^\alpha \ln(x)^\beta e^{cx^\gamma}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma > 0$)

DEF 24: Soit X un espace métrique, $f: D \subset X \rightarrow \mathbb{E}$, $x_0 \in D$ un point d'accumulation et $f \in \mathcal{E}$. On appelle développement asymptotique à k termes de f par rapport à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$ au voisinage de x_0 toute expression de la forme: $c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$ vérifiant:
• $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{E}$, $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{E}$ avec $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = 0$ et $f_i(x) = o(f_j(x))$ si $i < j$.
• $f(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_k f_k(x) + o(f_k(x))$

PROP 25: Lorsqu'un tel DA à k termes existe, il est unique. On en particulier $f(x) \sim c_1 f_1(x)$ et on dit que $c_1 f_1$ est la partie principale (ou l'équivalent) de f au voisinage de x_0 .

DEF 26: Un développement limité est un développement asymptotique par rapport à l'échelle de comparaison de fonctions $x \mapsto x^n$.

II - Exemples de développements asymptotiques de suites

1) Suites numériques [COV]

THM 27: Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites de réels positifs. De plus

	$u_n = O(v_n)$	$u_n = o(v_n)$	$u_n \sim v_n$
$\sum u_n < +\infty$	$R_n(u) = O(R_n(v))$	$R_n(u) = o(R_n(v))$	$R_n(u) \sim R_n(v)$
$\sum v_n = +\infty$	$S_n(u) = O(S_n(v))$	$S_n(u) = o(S_n(v))$	$S_n(u) \sim S_n(v)$

où R_n, S_n désignent respectivement la somme partielle et le reste.

THM 28: Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la suite (u_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(0) + \dots + f(n) - \int_0^{n+1} f(t) dt$ converge. En particulier, $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ ont même nature.

EX 29: (Séries de Bertrand) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

EX 30: $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$. On en donne un développement asymptotique, grâce à la formule d'Euler-Maclaurin.

DEF 31:

Soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$. Par IPP, on a:
 $\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(1) = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 B_1(x) f'(x) dx$ avec $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$
 On construit B_p de sorte que $B_p'(x) = p B_{p-1}(x)$ et $\int_0^1 B_p(x) dx = 0$

THM 32: Les polynômes B_p sont appelés polynômes de Bernoulli. Les nombres de Bernoulli sont les réels b_p définis par: $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_p = B_p(0)$, $p \geq 2$
 On a: $B_p(x) = \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} b_m x^{p-m}$, $b_p = \sum_{m=0}^p \binom{p}{m} b_m$
 $B_p(1-x) = (-1)^p B_p(x)$ et $b_m = 0$ si m impair ≥ 3 . **DEV 1**

THM 33: (Formule d'Euler-Maclaurin) Soient $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $m < n$, $f: [m,n] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On a:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} [f(m) + f(n)] + \sum_{l=2}^n \frac{b_l}{l!} [f^{(l-1)}(m) - f^{(l-1)}(n)] + R_n$$

où $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_m^n B_n(t) f^{(n)}(t) dt$
APPLI 34: On a $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma_n + \frac{1}{2n} + \sum_{l=2}^{n-1} \frac{(-1)^{l-1} b_l}{l} \frac{1}{n^l} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 et γ_n est indépendante de n

2) Suites récurrentes [GOV]

DEF 35: Soit (E, d) un espace métrique et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. (u_n) est dite récurrente d'ordre k lorsqu'on peut écrire:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = f(u_n, u_{n+1}, \dots, u_n)$$

PROP 36: Si $u_n \rightarrow l \in E$ et si f est continue en $(l, \dots, l)$ alors $l = f(l, \dots, l)$. **DEV 2**

PROP 37: Soit (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n) \end{cases}$
 Alors $u_n = \sqrt{\frac{3}{\pi n}} + \frac{3\sqrt{6}}{80\pi^2 n} \ln(n) + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$

III - Exemples de développements asymptotiques de fonctions

1) Fonctions définies par une intégrale [GOV]

THM 38: Soient $[a,b]$ intervalle de $\mathbb{R}$ semi-ouvert ($-\infty < a < b < +\infty$)
 E un $\mathbb{R}$ -espace de Banach, $f: [a,b[\rightarrow E$, $g: [a,b[\rightarrow \mathbb{R}^+$
 continues par morceaux sur $[a,b[$. On a un tableau similaire à celui des séries

$f = O(g)$	$f = o(g)$	$f \sim g$
$\int_a^b g(t) dt = 0$	$\int_a^b g(t) dt = O\left(\int_a^b g(t) dt\right)$	$\int_a^b g(t) dt = o\left(\int_a^b g(t) dt\right)$
$\int_a^b g(t) dt < \infty$	$\int_a^b g(t) dt = O\left(\int_a^b g(t) dt\right)$	$\int_a^b g(t) dt \sim \int_a^b g(t) dt$

EX 39: Pour $a > 0$, $\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$ donc $\ln(x) = o\left(\int_1^x t^{-1/2} dt\right) = o(x^{1/2})$

EX 40: $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln^2(x)} + \dots + \frac{(k-1)!}{\ln^k(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^k(x)}\right)$

2) Fonctions définies par la somme d'une série

THM 41: Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}_m^{\infty}$ décroissante telle que $\int_0^{\infty} f(t) dt$ converge et est non nulle. Alors pour tout $t > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} f(nt)$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} f(nt) \sim \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx$ **Ref?**

EX 42: $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$ où γ est la constante d'Euler et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

3) Application aux tangentes et asymptotes

a) Position d'une courbe par rapport aux tangentes

$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ ($n \geq 2$). f est dérivable en a

$f'(a) = a_1$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $a_k \neq 0$. Soit $p = \min\{k \in \mathbb{N}, k \geq 2, a_k \neq 0\}$. $g(x) = f(x) - a_0 - a_1(x-a)$

- Si p pair et $a_p > 0$, $g(x) > 0$ pour x voisin de a , la courbe est localement au dessus de la tangente.

- Si p pair et $a_p < 0$, la courbe est localement en dessous de la tangente.

- Si p impair, la courbe traverse la tangente au voisinage de a .

b) Position d'une courbe par rapport aux asymptotes

Si on a $\frac{f(x)}{x} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$, $n \geq 2$, a_k non tous nuls pour $k \in \mathbb{N}$.

On note $p = \min\{k \in \mathbb{N}, k \geq 2, a_k \neq 0\}$ on a

$f(x) - a_0 x - a_1 = \frac{a_p}{x^p} (1 + o(1))$ donc $y = a_1 + a_0 x$ est asymptote à la courbe et le signe de a_p nous donne les positions relatives