

Leçon 223: Suites numériques, Convergence, valeurs d'adhérence - Exemples et applications.

Références: El Amrani, Romheldi, Francinou, Rouvère
(Ana-réelle)

I - Convergence de suites numériques

1) Limite

2) Valeurs d'adhérence

3) Cas des suites réelles

a) Théorèmes généraux

b) Suites réelles bornées

4) Suites de Cauchy

5) Vitesse et accélération de la convergence

II - Suites remarquables

1) Séries numériques

2) Suites définies par récurrence

III - Applications

1) Approximation décimale d'un réel

2) Résolution approchée d'équations de type $f(x)=0$

DEV 1: Anchain itérés

DEV 2: Méthode de Newton

Leçon 223: Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$.

I - Convergence de suites numériques

1) Limite (ELAT)

DEF 1: Soit $l \in K$. On dit que (u_n) admet l pour limite lorsque

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$.

EX2: On définit: $\forall n \geq 1, u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. On a que (u_n) a pour limite 1.

THM3: Si (u_n) admet une limite, alors celle-ci est unique.

DEF 4: On dit que (u_n) est convergente lorsqu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

REMS: La nature d'une suite reste inchangée si on modifie un nombre fini de ses termes.

PROPE: Toute suite numérique convergente est bornée.

PROP 7: Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites numériques telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ et (v_n) est bornée. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = 0$.

EX8: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

2) Valeurs d'adhérence (ELAT)

DEF 9: On appelle sous-suite ou suite extraite de (u_n) toute suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

EX10: (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des sous-suites de (u_n) .

LEMME 11: $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

PROP 12: Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \in K$, toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers l .

DEF 13: On appelle valeur d'adhérence tout élément limite d'une suite extraite de (u_n) .

COR 14: Toute suite numérique convergente ne possède que sa limite comme valeur d'adhérence.

EX15: La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence qui sont 1 et -1, donc elle diverge.

REM 16: La réciproque est fautive: $((1 - (-1)^n)/n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède que 0 comme valeur d'adhérence, cependant elle ne converge pas car $u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

PROP 17: Soit $l \in K$. $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l \Leftrightarrow u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ et $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.

PROP 18: L'ensemble des valeurs d'adhérence est fermé. L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée est fermé borné.

3) Cas des suites réelles. Ici, $K = \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

LEMME 19: On suppose (u_n) convergente. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1) Si $u_n \geq a$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq a$.

2) Si $u_n \leq a$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq a$.

COR 20: Soit $(u_n), (v_n)$ convergentes. Si à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

THM 21 (encadrement): Soit $(u_n), (a_n), (b_n)$ trois suites réelles telle qu'à partir d'un certain rang, on ait $a_n \leq u_n \leq b_n$. Si (a_n) et (b_n) convergent et ont même limite l , alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.

THM 22: (limite monotone) 1) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n < \infty$.

2) Si (u_n) est décroissante et minorée, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n > -\infty$.

REM 23: Si (u_n) est croissante non majorée, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Si (u_n) est décroissante non minorée, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

DEF 24: Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque: (i) (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.

EX 25: $(1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(1 - \frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

THM 26: Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent de même limite l . De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$.

b) Suites réelles bornées

THM 27: (Segments emboîtés) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $\begin{cases} k \in \mathbb{N}, a_k \leq b_k \\ k \in \mathbb{N}, [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \end{cases}$
Alors : $\exists l \in \mathbb{R}, \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{l\}$ ($b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$)

THM 28: (Bolzano-Weierstrass) Dans $\mathbb{R}$, toute suite bornée possède au moins une sous-suite convergente.

REM 29: Ce théorème est aussi vrai pour des suites complexes.

APPLI 30: Soit K un compact de $\mathbb{R}$, toute fonction continue de K dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur K .

APPLI 31: Toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme de fonctions affines par morceaux.

LEMME 32: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$ et $w_n = \inf_{p \geq n} u_p$. Alors (v_n) est décroissante minorée et (w_n) est croissante majorée.

LEMME 33: $l_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \geq n} u_p$ et $l_2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{p \geq n} u_p$ sont des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

LEMME 34: Pour toute valeur d'adhérence l de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a $l_1 \leq l \leq l_2$.

THM 35: (u_n) converge $\Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$

4) Suites de Cauchy [ELAF]

DEF 36: On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, |u_m - u_n| \leq \varepsilon$.

PROP 37: 1) Toute suite convergente est de Cauchy.
2) Toute sous-suite d'une de Cauchy est de Cauchy.
3) Toute suite de Cauchy est bornée.

THM 38: Toute suite réelle ou complexe de Cauchy est convergente : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est donc complet.

EX 39: $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy donc diverge.

5) Vitesse de convergence et accélération [ELAF]

Soit $l \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers l . On veut préciser la rapidité de convergence de (u_n) quitte à considérer $|u_n - l|$ on se ramène au cas : $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l = 0$.

DEF 40: On dit que (u_n) converge géométriquement vers 0 lorsque : $\exists 0 < k < 1, u_n = O(k^n)$

On dit que (u_n) converge lentement vers 0 lorsqu'elle est minorée par une suite du type $\frac{A}{n^u}$, $A, u > 0$.

On dit que (u_n) converge lentement vers 0

On dit que (u_n) converge vers 0 (au moins) quadratiquement lorsque $u_n = O(k^{2^n})$ avec $0 < k < 1$.

THM 41: (D'Alembert) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow k \in]0, 1[$. Alors (u_n) converge vers 0 géométriquement.

PROP 42: (Cauchy) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge géométriquement si et seulement si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$.

THM 43: Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ convergente vers 0. On suppose que $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ est bornée.

THM 44: (Riemann - Richardson) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_n = l + \lambda k^n + O(k^{n+1})$, $\lambda \in \mathbb{R}, |k| < 1$ où k est le rapport de convergence géométrique de (u_n) . On pose $u'_n = \frac{u_{n+1} - k u_n}{1-k}$. Alors $u'_n - l = O(k^{n+1})$ donc (u'_n) tend vers l avec une convergence (au moins) géométrique de rapport k .

THM 45: (Aitken) Soit $u_n = l + \lambda k^n + O(k^{n+1})$ avec $0 < |k| < 1$ et k inconnue. On pose $e_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$ et $u'_n = \frac{u_{n+1} - e_n u_n}{1 - e_n}$. Alors (u'_n) converge vers l et $u'_n - l = O(k^{n+1})$.

REM 46: La méthode d'Aitken s'applique notamment aux suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

II - Suites remarquables

1) Séries numériques [ELAF]

DEF 47: La série de terme général (u_n) est la suite (S_n) où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On dit que $\sum u_n$ converge lorsque (S_n) converge et on appelle somme de la série sa limite.

EX 48: $\sum a^n$ converge $\Leftrightarrow |a| < 1$ ($a \in \mathbb{C}$)

PROP 49: Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

EX 50: La réciproque est fautive: $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$ diverge.

DEF 51: On dit que $\sum u_n$ converge absolument lorsque $\sum |u_n|$ converge.

PROP 52: Toute série absolument convergente est convergente mais la réciproque est fautive.

THM 53: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles positives.

Si $u_n = O(v_n)$, $\sum v_n$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ CV et $\sum u_k = O(\sum v_k)$
 $\sum u_n$ DV $\Rightarrow \sum v_n$ DV et $\sum u_k = O(\sum v_k)$

De même si $u_n = o(v_n)$
 Si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature et $\sum u_k \sim \sum v_k$ (CV)

THM 54: (Césaro) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k \rightarrow l$

2) Suites définies par récurrence [SLAT]

DEF 55: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

On définit: $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

THM 56: Si $I =]a, b[$, $l \in \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en l et pour tout $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$, $u_n \rightarrow l \Rightarrow f(u_n) \rightarrow f(l)$

COR 57: Si $u_n \rightarrow l \in I$, alors $f(l) = l$.

PROP 58: On suppose que $f: I \rightarrow I$.

a) Si f est croissante, alors (u_n) est monotone
 b) Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie opposée.

THM 59: (point fixe de Picard) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\exists k < 1$; $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Alors $\exists ! x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ et la suite (u_n) définie par récurrence converge vers x pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

EX 60: Etude de la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$
 $u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{6}}{80n\sqrt{n}} \ln(n) + o(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}})$

III - Applications

1) Approximation décimale d'un réel [RAT]

THM 61: Soit $x \in \mathbb{R}$. Les suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $r_n = \lfloor 10^n x \rfloor$ et $s_n = r_n + 10^{-n}$ sont adjacentes et convergent vers x avec $r_n \leq x \leq s_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

COR 62: L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$.

COR 63: L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$. De même pour $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2) Résolution d'équations de type $f(x) = 0$ [RA]

Soit $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère: $x_{n+1} = F(x_n)$ $n \geq 0$ avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

PROP 64: f a une unique $\alpha \in [c, d]$. Pour tout $x \in [c, d]$, il existe $z \in [a, x]$, $F(x) - \alpha = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)} (x - \alpha)^2$

PROP 65: Il existe $C > 0$, $|F(x) - \alpha| \leq C|x - \alpha|^2$ pour tout $x \in [c, d]$. Il existe $\lambda > 0$, $I = [a - \lambda, a + \lambda]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, (x_n) converge quadratiquement vers $\alpha \in I$.

PROP 66: On suppose que $f'' > 0$ sur $[c, d]$. Le résultat de PROP 65 reste valable avec $I = [a, d]$, (x_n) est strictement décroissante (ou constante) et on a $0 \leq x_{n+1} - \alpha \leq C(x_n - \alpha)^2$
 $x_{n+1} - \alpha \sim \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} (x_n - \alpha)^2$

APPLI 67: Soit $y > 0$. On prend $f(x) = x^2 - y$ et on trouve une approximation de $\sqrt{y}$.