Leçon 205 - Espaces complets. Exemples et applications

Extrait du rapport de jury

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point fixe de Picard-Banach et ses applications, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications.
Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle.
Les espaces L^p peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécifique d'espaces de Banach.
Pour les candidates et candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 205 intitulée : "Espaces complets. Exemples et applications". Lorsque l'on s'intéresse à des limites de familles d'éléments d'un espace, la question de l'existence de la limite peut souvent poser problème. Lorsqu'elle existe, la limite peut aussi ne pas appartenir à l'espace de départ. Les espaces complets sont alors un cadre très pratique car ce sont des espaces dans lesquels les suites convergentes admettent leur limite dans ces espaces. Travailler dans ces espaces assure donc de nombreux résultats d'existence dont nous allons parler dans cette leçon. De plus, nous verrons que tout espace métrique peut être complété en un espace complet, et donc dans la pratique on peut assez facilement se placer dans ce contexte.
Dans une premières partie, on s'intéresse aux généralités concernant les espaces complets. Tout d'abord, on s'intéresse aux suites de Cauchy qui sont la base des espaces complets. On commence donc par donner la définition d'une suite de Cauchy ainsi que des premières propriétés sur ces suites, notamment au niveau de la convergence. La propriété d'être de Cauchy se transporte à un autre espace métrique, à condition que la fonction considérée soit uniformément continue. Dans un deuxième point, on s'intéresse désormais aux espaces complets qui sont le coeur de cette leçon. On commence à donner la définition d'un espace complet ainsi que quelques exemples. On regarde ensuite comment la complétude se comporte vis-à-vis de sous-ensembles d'un espace complet ainsi que vis-à-vis des espaces produit. On termine ce point avec le théorème de Cantor. Pour terminer cette première partie, on s'intéresse au complété d'un espace métrique. En effet, les espaces complets sont tous très importants mais tous les espaces ne sont pas complets malheureusement... Cependant, il est possible de voir tout espace métrique comme étant dense dans un espace métrique complet plus gros (c'est ce qu'énonce le théorème 17).
Dans une deuxième partie, on étudie un exemple important qui concerne les espaces de Banach. On commence avec un premier point sur les définitions de base et les premières propriétés. Ainsi, on commence à donner la définition d'un espace de Banach ainsi que quelques exemples et le lien avec l'espace des applications/formes linéaires. Enfin, les espaces de Banach permettent aussi de définir une exponentielle. Dans un deuxième point, on s'intéresse plus particulièrement aux espaces L^p en donnant leur définition ainsi que l'inégalité de Hölder et de Minkowski qui permettent de montrer que les espaces L^p sont des espaces vectoriels normés. On conclut ce point avec le théorème de Riesz-Fischer. On traite ensuite d'un dernier point sur les espaces de Hilbert qui possèdent d'avantage de propriétés remarquables. On donne ainsi la définition d'un espace préhilbertien et hilbertien ainsi que les premiers exemple d'espaces de Hilbert. On termine ce point et cette partie par la projection sur un convexe fermé ainsi que deux corollaires.
Pour finir, on traite en dernière partie des applications de la complétude. Tout d'abord, on commence par le théorème du point fixe de Banach qui est un résultat remarquable et très utile de la complétude des espaces. De plus, une conséquence de ce théorème est le théorème de Cauchy-Lipschitz local qui donne l'existence et l'unicité d'une

solution locale à un problème de Cauchy donné puis le théorème de Cauchy-Lipschitz global. On poursuit dans un deuxième temps avec des théorèmes de prolongement de fonctions : tout d'abord dans le cadre général ainsi que dans le cas du complété d'un espace métrique puis dans un cas particulier avec le théorème de Fourier-Plancherel concernant la transformation de Fourier qui permet de l'étendre au cas de l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Dans un troisième sous-partie on parle du lemme de Baire ainsi que quelques conséquences très pratiques comme la proposition 50, ainsi que des théorèmes très importants tels que le théorème de l'application ouverte, du graphe fermé et du théorème de Banach-Steinhaus et une conséquence sur les série de Fourier. Finalement, on conclut avec les polynômes orthogonaux où l'on montre que l'espace $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert et on en donne une base hilbertienne.

Plan général

I - Espaces complets et suites de Cauchy
1 - Suites de Cauchy
2 - Espaces complets
3 - Complété d'un espace métrique

II - Un exemple important : les espaces de Banach
1 - Définitions et premières propriétés
2 - Les espaces L^p
3 - Les espaces de Hilbert

III - Applications de la complétude
1 - Un théorème du point fixe
2 - Théorèmes de prolongement
3 - Le lemme de Baire et ses conséquences
4 - Application aux polynômes orthogonaux

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère (X,d) un espace métrique non vide.

I Espaces complets et suites de Cauchy

I.1 Suites de Cauchy

Définition 1 : Suite de Cauchy [Hassan, p.107] :
On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$.
On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n,m \in \mathbb{N},\ (n,m \geq N_0) \implies (d(x_n,x_m) \leq \varepsilon)$$

Proposition 2 : [Hassan, p.107]
* Toute suite convergente dans X est de Cauchy.
* Toute sous-suite de Cauchy est une suite de Cauchy.

Proposition 3 : [Hassan, p.108]
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, elle possède une sous-suite convergente (autrement dit, une suite de Cauchy dans X possédant une valeur d'adhérence est convergente).
* Pour toute suite $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq \varepsilon_k$.

Proposition 4 : [Hassan, p.108]
Soient (Y,d') un espace métrique non vide et $f : (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ une application uniformément continue.
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

Remarque 5 : [Hassan, p.109]
L'hypothèse d'uniforme continuité n'est pas superflue. En effet, si l'on considère $X =]0;+\infty[$ muni de la topologie induite par $\mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$, alors f est un homéomorphisme de X sur X, mais pour la suite de Cauchy $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = (n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy.

I.2 Espaces complets

Définition 6 : Espace complet [Hassan, p.109] :
On dit que (X,d) est un **espace complet** lorsque toute suite de Cauchy dans (X,d) est convergente.

Remarque 7 : [Hassan, p.109]
De même, un sous-ensemble A de (X, d) est dit complet lorsque A muni de la distance induite est un espace métrique complet.

Exemple 8 : [Hassan, p.109]
$*$ L'espace $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, mais l'espace $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ne l'est pas.
$*$ Attention, $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $]-1;1[$ via l'application $x \longmapsto \frac{1}{1+|x|}$ mais $(]-1;1[, |\cdot|)$ n'est pas complet.

Proposition 9 : [Hassan, p.109]
Soient (Y, d') un espace métrique et $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homéomorphisme.
Si f est uniformément continue sur X et que (Y, d') est complet, alors (X, d) est complet.

Proposition 10 : [Hassan, p.110]
Soit A un sous-ensemble non vide de (X, d).
$*$ Si A est complet, alors A est fermé dans X.
$*$ Si A est dense dans X et $A \subsetneq X$, alors A n'est pas complet.
$*$ Si (X, d) est complet et si A est fermé dans X, alors A est complet.

Exemple 11 :
L'espace $[0;1] \subseteq \mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$ est complet.

Proposition 12 : [Gourdon, p.30]
Soit A un sous-ensemble non vide de (X, d).
Si A est compact, alors A est complet.

Proposition 13 : [Hassan, p.111]
Soit $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques.
L'espace métrique produit $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est complet si, et seulement si, tous les espaces (X_n, d_n) sont complets.

Exemple 14 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les espaces $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^n$ sont complets.

Théorème 15 : Théorème de Cantor [Hassan, p.113] :
L'espace (X, d) est complet si, et seulement si, l'intersection de toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties fermées non vides de (X, d) dont le diamètre tend vers 0 est réduite à un singleton.

Remarque 16 : [Hassan, p.114]
L'hypothèse sur le diamètre est essentielle. En effet, si l'on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fermés $F_n = [n; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui est complet, alors la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de $\mathbb{R}$ dont l'intersection est vide.

I.3 Complété d'un espace métrique

Théorème 17 : [Hassan, p.120]
$*$ Il existe un espace métrique complet $\left(\widehat{X}, \widehat{d}\right)$ et il existe une application isométrique $\iota : X \longrightarrow \widehat{X}$ telle que $\iota(X)$ soit dense dans $\widehat{X}$, et ainsi on peut identifier X à $\iota(X)$ et considérer X comme un sous-ensemble dense de $\widehat{X}$.
$*$ Si (Y, d') est un espace métrique complet et s'il existe une application isométrique $j : X \longrightarrow Y$ telle que $j(X)$ soit dense dans Y, alors il existe une unique application continue $\varphi : \widehat{X} \longrightarrow Y$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\iota"'] & & Y \\ & \widehat{X} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, φ est une isométrie de $\widehat{X}$ sur Y.

Exemple 18 : [Hassan, p.121]
Si (Y, d) est un espace métrique complet et X un sous-ensemble de Y, alors $(\overline{X}, d)$ est le complété de (X, d).

II Un exemple important : les espaces de Banach

Dans toute cette partie, on considère $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé avec $\mathbb{K}$ un corps commutatif égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Définition et premières propriétés

Définition 19 : Espace de Banach [Gourdon, p.20] :
On dit que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un **espace de Banach** lorsqu'il est complet.

Exemple 20 : [Hassan, p.121]
$*$ Pour tout $p \in [1; +\infty]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ est complet.
$*$ Pour tout compact K, $(\mathcal{C}^0(K), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
$*$ $(\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet (car fermé dans $(\mathcal{C}^0_b(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$).
$*$ $(\mathcal{C}^0_c(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet et $(\mathcal{C}^0_0(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est le complété de $(\mathcal{C}^0_c(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

Théorème 21 : [Gourdon, p.48]
Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach, alors $\left(\mathcal{L}_c(E, F), |||\cdot|||_{E,F}\right)$ l'est aussi.

Corollaire 22 : [Gourdon, p.49]
Le dual topologique de E (noté $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$) est un espace de Banach.

Corollaire 23 : [Gourdon, p.49]
Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach, alors toute série $\sum u_n$ de $\mathcal{L}_c(E)$ absolument convergente est convergente.

Proposition 24 : [Gourdon, p.49]
Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$.
Si $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ est un espace de Banach et que $|||u|||_E < 1$, alors $\mathrm{Id}_E - u$ est inversible et d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.

Définition 25 : Exponentielle dans une algèbre de Banach [Gourdon, p.50] :
On considère $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $x \in A$.
On appelle **exponentielle de** x la série convergente $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

II.2 Les espaces L^p

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 26 : Espaces $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^\infty$ [El Amrani, p.417] :
On considère $p \in [1; +\infty[$.
On appelle :
* **espace** $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < +\infty$.
* **espace** $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions mesurables f telles que :

$$\|f\|_{\infty,ess} = \{\inf M > 0 \text{ tq } \mu(\{|f| > M\}) = 0\} < +\infty$$

Remarque 27 : [El Amrani, p.417]
L'espace $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel mais l'application $f \longmapsto \|f\|_p$ n'est qu'une semi-norme dessus... En effet, $\|f\|_p = 0$ n'entraîne pas que $f = 0$ mais seulement que $f \underset{\mu-p.p.}{=} 0$!

Définition 28 : Espaces L^p [El Amrani, p.417] :
On considère $p \in [1; +\infty]$.
On appelle **espace** L^p l'espace $\mathcal{L}^p$ quotienté par la relation d'équivalence $\sim$ définie par :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu), \ (f \sim g) \iff (f \underset{\mu-p.p.}{=} g)$$

Proposition 29 : Inégalités de Hölder et de Minkowski [Faraut, p.42] :
Soient $p \in [1; +\infty[$ et q sont exposant conjugué.
* Pour tout $(f, g) \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \times L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$, on a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
* Pour toutes fonctions $f, g \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, on a :

$$\left(\int_X |f+g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

avec cas d'égalité lorsque $p = 1$ et f et g presque-partout positivement liées.

Corollaire 30 : [El Amrani, p.417]
Pour tout $p \in [1; +\infty]$, $\left(L^p(X, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|_p\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Théorème 31 : Théorème de Riesz-Fischer [Faraut, p.46 + 47] :
Pour $p \in [1; +\infty]$, l'espace $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace de Banach pour $\|\cdot\|_p$.

II.3 Les espaces de Hilbert

Définition 32 : Espace préhilbertien [Hassan, p.480] :
On appelle **espace préhilbertien** la donnée d'un espace vectoriel H et d'un produit scalaire $< \cdot; \cdot >_H$ sur H.

Dans toute la suite de cette sous-partie, on considère $(H, < \cdot; \cdot >_H)$ un espace de préhilbertien, avec H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 33 : Inégalité de Cauchy-Schwarz [Hassan, p.482] :
Pour tout $(x, y) \in H^2$, on a :

$$|< x; y >_H|^2 \leq < x; x >_H < y; y >_H$$

Proposition 34 : [Hassan, p.480]
L'application :

$$\|\cdot\|_H : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{< x; x >_H} \end{array} \right.$$

est une norme (appelée **norme hilbertienne**) sur H.

Définition 35 : Espace de Hilbert [Hassan, p.480] :
On appelle **espace hilbertien** tout espace préhilbertien qui est aussi de Banach pour la norme associée au produit scalaire.

Exemple 36 : [Hassan, p.480 + 481]

$*$ $\mathbb{R}^d$ muni de $< x; y >= \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ est un espace de Hilbert.
$*$ $\mathbb{C}^d$ muni de $< x; y >= \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}$ est un espace de Hilbert.
$*$ $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de $< x; y >= \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \overline{y_i}$ est un espace de Hilbert.
$*$ $\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de $< f; g >= \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un espace préhilbertien non complet.
$*$ Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie muni d'un produit scalaire est complet et donc de Hilbert.

Théorème 37 : [Hassan, p.489]

Soit C un convexe fermé non vide de $(H, < \cdot; \cdot >)$.
Pour tout $x \in H$, il existe un unique $c \in C$ (appelé **projection de x sur C**) tel que $d(x, C) = \|x - c\|$ avec pour tout $z \in C$, $\mathrm{Re}(< z - c; x - c >) \leq 0$.
De plus, en notant P_C la projection sur C, on a P_C 1-lipschitzienne (donc continue).

Corollaire 38 : [Hassan, p.490]

Si F est un sous-espace vectoriel fermé de $(H, < \cdot; \cdot >_H)$ et que $(H, < \cdot; \cdot >_H)$ est un espace hilbertien, alors P_F est linéaire et continue de H sur F.

Corollaire 39 : [Hassan, p.491]

Si F est un sous-espace vectoriel fermée de $(H, < \cdot; \cdot >_H)$ et que $(H, < \cdot; \cdot >_H)$ est un espace hilbertien, alors $H = F \underset{\text{top.}}{\oplus} F^{\perp}$.

Remarque 40 :

L'hypothèse de fermeture dans le corollaire précédent n'est pas superflue. En effet, pour $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et F l'ensemble des suites de H nulles à partir d'un certain rang, on a $F^{\perp} = \{0_H\}$ mais $E \neq F$.

III Applications de la complétude

Dans toute cette partie, on suppose (X, d) complet.

III.1 Un théorème du point fixe

Théorème 41 : Théorème du point fixe de Banach [Hassan, p.115] :

Soit $f : X \longrightarrow X$ une application contractante de rapport k.
$*$ f possède un unique point fixe $z \in X$.
$*$ Pour tout élément $x \in X$, on a $z = \lim_{n \to +\infty} f^n(x)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(z, f^n(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(z, f(x))$.

Remarque 42 : [Hassan, p.116]

$*$ Si $k \geq 1$, le théorème n'est plus vrai. En effet, pour $X = \mathbb{N}$, $(X, |\cdot|)$ est complet mais l'application $f : n \longmapsto kn + 1$ n'a pas de point fixe pour $k \in \mathbb{N}^*$.
$*$ Si (X, d) n'est pas complet, alors le théorème n'est plus vrai. En effet, pour $X =]0; 1]$, $(X, |\cdot|)$ n'est pas complet et l'application $f : x \longmapsto \frac{x}{2}$ est contractante mais n'admet aucun point fixe.

Développement 1 : [cf. DEMAILLY]

Théorème 43 : Théorème de Cauchy-Lipschitz local [Demailly, p.153] :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
Pour tout $(t_0, y_0) \in U$, il existe $\alpha > 0$ tel que le problème de Cauchy $PC_{(t_0,y_0)}$ ait une unique solution définie sur $[t_0 - \alpha; t_0 + \alpha]$.

Théorème 44 : Théorème de Cauchy-Lipschitz global [Demailly, p.154] :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue qui satisfait le théorème de Cauchy-Lipschitz local.
Pour tout $(t_0, y_0) \in U$, $PC_{(t_0,y_0)}$ admet une unique solution maximale.

III.2 Théorèmes de prolongement

Théorème 45 : [Hassan, p.114]

Soient (Y, d') un espace métrique, A une partie dense dans X et $f : A \longrightarrow Y$ une application uniformément continue.
Si (Y, d') est complet, alors f se prolonge de manière unique en une application continue $\widetilde{f} : X \longrightarrow Y$.
De plus, $\widetilde{f}$ est uniformément continue.

Remarque 46 : [Hassan, p.120]

En particulier, il existe une unique application $\widetilde{f} : \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ uniformément continue telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \widehat{X} \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \widehat{Y} \\ X \arrow[u, "\iota_X"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "\iota_Y"'] \end{tikzcd}$$

Théorème 47 : Théorème du prolongement [Hassan, p.327] :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach, H un sous-espace vectoriel dense dans E et $f \in \mathcal{L}(H, F)$.
Il existe une unique application $g \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que g prolonge f.
De plus, on a $|||g||| = |||f|||$.

Théorème 48 : Théorème de Fourier-Plancherel [El Amrani, p.124]
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.
$*$ Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.
$*$ Pour une telle suite, la suite $(\mathcal{F}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite $\widetilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

III.3 Le lemme de Baire et ses conséquences

Dans toute cette sous-partie, on considère deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lemme 49 : Lemme de Baire [Gourdon, p.417] :
Si (E, d) est un espace métrique complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E.

Proposition 50 : [Gourdon, p.419]
Tout espace vectoriel normé à base dénombrable n'est pas complet.

Théorème 51 : Théorème de l'application ouverte [Gourdon, p.423] :
Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire, continue et surjective.
Si $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ sont deux espaces de Banach, alors il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(0, r) \subseteq T\left(\mathcal{B}_o(0, 1)\right)$.

Corollaire 52 : [Gourdon, p.423]
Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire, continue et bijective.
Si $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ sont deux espaces de Banach, alors $T^{-1} \in \mathcal{L}_c(F, E)$.

Théorème 53 : Théorème du graphe fermé [Hassan, p.416] :
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Si $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ sont deux espaces de Banach, alors :

$$(f \text{ est continue}) \iff (\{(x, f(x)),\ x \in E\} \text{ est un fermé dans l'espace de Banach } E \times F)$$

Développement 2 : [cf. GOURDON]

Théorème 54 : Théorème de Banach-Steinhaus [Gourdon, p.424] :
Si $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ est un espace de Banach, alors pour toute famille d'applications $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}_c(E, F)$ telles que pour tout $x \in E$ on ait l'inégalité $\sup\{\|T(x)\|,\ T \in \mathcal{F}\} < +\infty$ on a $\sup\{\|T\|_{E,F},\ T \in \mathcal{F}\} < +\infty$.
En d'autres termes :

$$\exists C > 0 \text{ tq } \forall T \in \mathcal{F},\ \forall x \in E,\ \|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

Corollaire 55 : [Gourdon, p.425]
Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

III.4 Application aux polynômes orthogonaux

Dans toute cette sous-partie, on considère un intervalle $I =]a; b[$ borné ou non de $\mathbb{R}$.

Définition 56 : Fonction poids [El Amrani, p.40] :
On appelle **poids sur** I une application $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

Définition 57 : L'espace $L^2(I, \rho)$:
On appelle **espace** $L^2(I, \rho)$ l'ensemble $\left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \int_I |f(x)|^2 \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty\right\}$.

Proposition 58 : [El Amrani, p.41]
L'espace $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert et tout polynôme appartient à $L^2(I, \rho)$.

Théorème 59 : [El Amrani, p.41]
Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(L^2(I, \rho)\right)^{\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux et tels que $\deg(P_n) = n$ (cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée au poids ρ).

Exemple 60 : [El Amrani, p.41]
$*$ Si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\rho(x) = e^{-x}$, on obtient alors les polynômes de Laguerre.
$*$ Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on obtient alors les polynômes de Hermite.
$*$ Si $I =]-1; 1[$ et $\rho(x) = 1$, on obtient alors les polynômes de Legendre.
$*$ Si $I =]-1; 1[$ et $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient alors les polynômes de Tchebychev.

Théorème 61 : [El Amrani, p.47]
Soit ρ une fonction poids sur I.
S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Remarque 62 : [El Amrani, p.46]
L'hypothèse faite sur ρ n'est pas superflue. En effet, en considérant $I =]0; +\infty[$, $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$ et $f(x) = \sin(2\pi\ln(x))$, on a $\int_I f(x)x^n\rho(x)\mathrm{d}x = 0$.

Remarques sur la leçon

— Il est possible de s'intéresser d'avantage aux espaces de Baire ainsi qu'à l'espace de Bergman.

— Il est également envisageable de parler des séries de Fourier au travers de l'espace $L^2(\mathbb{T})$, du théorème de Féjer ainsi que de la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Liste des développements possibles

— Théorème de projection sur un convexe fermé.

— Théorème de Cauchy-Lipschitz local.

— Théorème de Banach-Steinhaus + application aux séries de Fourier.

Bibliographie

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

— Jacques Faraut, *Calcul intégral*.

— Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*.