Leçon 203 - Utilisation de la notion de compacité.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son utilisation. On peut songer à plusieurs thèmes : théorèmes d'existence exploitant la compacité, utilisation de la compacité pour obtenir des uniformités.
Sur le premier sujet, on peut s'intéresser à l'utilisation, dans les espaces compacts ou les espaces normés de dimension finie, des valeurs d'adhérence pour prouver des convergences ou des continuités, et bien sûr aux problèmes d'extrema. Un exemple est le théorème d'équivalence des normes sur un espace de dimension finie, qui repose sur un argument de compacité qu'il faut avoir bien compris.
Sur le second, on peut explorer quelques unes des innombrables applications du théorème de Heine (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues sur un segment, continuité des translations dans L^p, etc), mais aussi l'utilisation de sous-recouvrements finis (par exemple pour passer du local au global).
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de la boule unité fermée (éventuellement assortie d'applications), aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact), à l'équicontinuité (théorème d'Ascoli), aux familles normales (théorème de Montel), aux opérateurs compacts.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 203 intitulée : "Utilisation de la notion de compacité.". Borel et Lebesgue sont les premiers à dégager la notion topologique de compacité avant de faire le lien avec la notion de compacité de Bolzano-Weierstrass. Cette notion est centrale en analyse moderne et elle correspond au cas d'un espace où la convergence est facile, les ouverts n'ayant pas suffisamment de places pour recouvrir l'espace sans trop de redondance.
Dans une première partie on s'intéresse à la notion de compacité et ses premières utilisations. On commence tout d'abord par en donner une définition avec la propriété de Borel-Lebesgue avant de donner un premier exemple puis les principales propriétés des compacts, notamment le côté borné ainsi que le comportement de la compacité vis-à-vis de la réunion et de l'intersection. On termine cette première sous-partie avec une application en énonçant le premier théorème de Dini. Dans une deuxième sous-partie on introduit la propriété de Bolzano-Weierstrass en faisant le lien avec la propriété de Borel-Lebesgue. Cette caractérisation de la compacité permet d'avoir une propriété qui paraît a priori totalement différente, mais parfois beaucoup plus souple d'utilisation. Cette caractérisation permet notamment de montrer les propositions 10 à 14 qui sont des résultats très utiles en pratiques. On termine cette partie avec un dernier point sur la compactification. En effet, nous avons vu que les espaces compacts jouissent de très bonnes propriétés d'une point de vue de la convergence des suites. Cependant certains espaces ne sont pas compacts mais il est possible de les compactifier. On commence donc par donner la définition d'un compactifié avant d'en venir au compactifié d'Alexandroff ainsi qu'au théorème d'Alexandroff et on conclut avec l'exemple du compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$.
Dans une deuxième partie on s'intéresse à la compacité du point de vue des fonctions continues. On commence par parler des extrema avec les propositions 21 et 23 avant d'en venir au théorème des bornes atteintes qui est très important car il permet de justifier l'existence d'objets théoriques tels que la distance à un compact ou entre deux compacts est bien atteinte en un point et il permet également d'en déduire le théorème de Rolle ainsi que celui des accroissements finis. Dans une deuxième sous-partie on s'intéresse au théorème de Heine qui permet de démontrer le deuxième théorème de Dini ou encore le théorème de Weierstrass qui est un résultat de densité très important. On parle ensuite dans une troisième sous-partie de quelques théorèmes du point fixe qui permettent de justifier l'existence théorique de points fixes pour des applications vérifiant certaines propriétés. On termine cette partie avec le théorème de Stone-Weierstrass qui est l'un des principaux moyens de montrer un résultat de densité dans un certain type d'espaces. On énonce donc d'abord trois lemmes préliminaires utiles à la démonstration du théorème avant de l'énoncer dans sa version réelle puis complexe.
Enfin dans une dernière partie on s'intéresse à la compacité dans les espaces vectoriels normés. On commence par le cas de la dimension finie qui nous donne le théorème 47, c'est-à-dire l'équivalence des normes en dimension finie. Ce résultat est fondamental car

il possède énormément de corollaires tels que la continuité des applications linéaires, la complétude des espaces, l'équivalence entre compact et fermé-borné, etc. Cependant ce théorème ne se généralise pas du tout au cas de la dimension infinie et c'est pourquoi on termine cette sous-partie avec une caractérisation de la dimension finie avec le théorème de Riesz. Enfin, on conclut cette leçon avec quelques homéomorphismes, notamment avec la décomposition polaire ainsi que l'homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère (E, d) un espace métrique non vide (dons séparé).

I Notion de compacité et premières propriétés

I.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Espace métrique compact [Gourdon, p.27] :
On dit que (E, d) est un **espace métrique compact** lorsque, de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut en extraire un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue).

Exemple 2 : [Gourdon, p.27]
$*$ Tout espace métrique est fini.
$*$ L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas compact (on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini du recouvrement $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n;n[$).

Proposition 3 : [Gourdon, p.27]
Un espace métrique compact est borné.

Proposition 4 : [Gourdon, p.29]
(E, d) est compact si, et seulement si, de toute intersection vide de fermés de E, on peut en extraire une sous-famille d'intersection vide.
En particulier, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact E, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Proposition 5 : [Gourdon, p.28]
Une partie A de E est compact si, et seulement si, de tout recouvrement de A par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Corollaire 6 : [Gourdon, p.238]
$*$ Une réunion finie de parties compactes est compacte.
$*$ Une intersection de compacts est compacte.

Théorème 7 : Premier théorème de Dini [Gourdon, p.238] :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a; b]$ de $\mathbb{R}$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.

I.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass et conséquences

Théorème 8 : Théorème de Bolzano-Weierstrass [Gourdon, p.28] :
(E,d) est compact si, et seulement si, de toute suite de points de E, on peut en extraire une sous-suite convergente dans E.

Corollaire 9 : [Gourdon, p.30]
(E,d) est compact si, et seulement si, l'une des deux assertions suivantes suivantes est vérifiée :
$*$ Toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence dans E.
$*$ Toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation dans E.

Proposition 10 : [Gourdon, p.30]
Soit A une partie de E.
$*$ Si (E,d) est compact et si A est une partie fermée de (E,d), alors A est compacte.
$*$ Si A est une partie compacte de (E,d), alors A est fermée et bornée.

Proposition 11 : [Gourdon, p.30]
Un espace compact est complet.

Proposition 12 : [Gourdon, p.30]
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
Si (E,d) est compact alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Proposition 13 : [Gourdon, p.30]
Soient $E_1, ..., E_n$ un nombre fini d'espaces compacts.
L'ensemble $E = \prod_{i=1}^n E_i$ est compact si, et seulement si, chaque E_i est compact.

Proposition 14 : [Gourdon, p.30]
Les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ (muni de la norme infinie) sont exactement les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 15 : [Deschamps (1), p.293]
L'ensemble $K = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 16 : [Gourdon, p.30]
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ.
L'ensemble $\Gamma = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

I.3 Compactification

Dans toute cette sous-partie, on considère $(X, \mathcal{T})$ un espace localement compact.

Définition 17 : Compactifié d'un espace métrique [Hassan, p.181] :
On appelle **compactifié de** X la donnée un couple $\left(\widehat{X}, f\right)$ avec $\widehat{X}$ un espace compact et un homéomorphisme f de X sur un sous-ensemble dense de $\widehat{X}$.
On identifie alors l'espace X avec $f(X) \subseteq \widehat{X}$.

Ajoutons à X un nouveau point ∞ appelé **point à l'infini** et considérons l'ensemble $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ ainsi que $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T} \cup \{X_\infty \backslash K,\ K \text{ compact de } X\}$. On obtient que $\mathcal{T}_\infty$ est une topologie sur X_∞ et que X_∞ est un espace compact.

Définition 18 : Compactifié d'Alexandroff [Hassan, p.182] :
L'espace compact $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ est appelé **compactifié d'Alexandroff de** $(X, \mathcal{T})$.

Théorème 19 : Théorème d'Alexandroff [Hassan, p.182] :
Il existe un espace compact X_∞ vérifiant les propriétés suivantes :
$*$ X est un sous-espace de X_∞.
$*$ $X_\infty \backslash X$ est réduit à un point $\{\infty\}$. En particulier, X est ouvert dans X_∞.
$*$ X est dense dans X_∞ si, et seulement si, X n'est pas compact.
$*$ Soient Y un espace compact et $g : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme de X sur $g(X)$ tel que $Y \backslash g(X)$ soit réduit à un point $\{w'\}$.
L'application $h : X_\infty \longrightarrow Y$ définie par $h(x) = g(x)$ si $x \in X$ et $h(x) = w'$ si $x = \infty$ est un homéomorphisme. En particulier, X_∞ est homéomorphe à Y (autrement dit, X_∞ est unique à l'homéomorphisme près).
$*$ Le compactifié d'Alexandroff d'un espace localement compact non compact est une compactification "minimale".

Exemple 20 : [Hassan, p.183]
Le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$ est la sphère $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\}$. En effet, les applications suivantes sont des homéomorphismes :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1;1[\\ x & \longmapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Phi : \left| \begin{array}{ccc}]-1;1[& \longrightarrow & \mathcal{S}\backslash\{(-1;0)\} \\ t & \longmapsto & e^{it\pi} \end{array} \right.$$

Donc $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathcal{S}\backslash\{(-1;0)\}$. Une autre méthode pour voir que $\mathcal{S}$ est le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}$ est d'utiliser la projection stéréographique.

II Fonctions continues sur un compact

Dans toute cette partie, on considère (F, δ) un espace métrique.

II.1 Extrema

Proposition 21 : [Gourdon, p.31]
Soit $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ une application continue.
Si (E, d) est compact, alors $(f(E), \delta)$ est compact.

Remarque 22 : [Gourdon, p.31]
La proposition précédente entraîne que f est une application fermée (ce qui est faux en général).

Proposition 23 : [Gourdon, p.31]
Soit $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ une application continue et bijective.
Si (E, d) est compact, alors f est un homéomorphisme.

Corollaire 24 : [Gourdon, p.31]
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Pour toute fonction $f : I \longrightarrow J$ continue et bijective, f^{-1} est continue.

Théorème 25 : [Théorème des bornes atteintes [Gourdon, p.31]
Soit $f : (E, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
Si (E, d) est compact, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque 26 : [Gourdon, p.31]
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue, alors avec le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'image par f d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Exemple 27 : [Deschamps (1), p.294]
$*$ Si A est une partie compacte non vide de E et $f : A \longrightarrow F$ une application continue, alors $\|f\|$ est bornée et atteint ses bornes.
$*$ Soient A une partie compacte non vide de E et $x_0 \in E$.
L'application $x \longmapsto d(x_0, x)$ est continue, donc sa restriction à A est bornée et atteint ses bornes et en particulier cette restriction est minorée et atteint sa borne inférieure. Cela assure l'existence de $a \in A$ tel que la distance de x_0 à A soit atteinte en a.
$*$ Soient A, B deux compacts non vides de E.
L'application définie sur $A \times B$ par $(a, b) \longmapsto d(a, b)$ est continue. Elle est donc bornée et atteint ses bornes et en particulier, cela assure l'existence d'un couple $(a, b) \in A \times B$ réalisant la distance entre A et B.

Théorème 28 : Théorème de Rolle [Deschamps (2), p.562] :
Soit $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ telle que $g(a) = g(b)$.
Il existe $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Théorème 29 : Égalité des accroissements finis [Deschamps (2), p.562] :
Soit $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Il existe $c \in]a; b[$ tel que $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$.

Théorème 30 : Inégalité des accroissements finis [Deschamps (2), p.567] :
Soient I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. S'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathring{I}$, $|g'(x)| \leq M$, alors g est M-lipschitzienne.

II.2 Théorème de Heine

Théorème 31 : Théorème de Heine [Deschamps (1), p.295]
Toute application continue continue sur un compact est uniformément continue.

Théorème 32 : Deuxième théorème de Dini [Gourdon, p.238] :
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a; b]$ de $\mathbb{R}$.
Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.

Développement 1 : [cf. DESCHAMPS (1)]

Lemme 33 : [Deschamps (1), p.994]
Soient f une fonction continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in [0; 1]$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(x)$ et $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall (t, u) \in [0; 1]^2, \ |f(t) - f(u)| \leq M(t - u)^2 + \varepsilon$$

En particulier, on a $|\mathbb{E}(f(Y_n)) - f(x)| \leq M \operatorname{Var}(Y_n) + \varepsilon \leq \frac{M}{4n} + \varepsilon$

Théorème 34 : Théorème de Weierstrass [Deschamps (1), p.994] :
Si l'on considère les polynômes de Bernstein définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{k}{n} x^k (1 - x)^{n-k}$$

alors la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0; 1]$.

Corollaire 35 : [Deschamps (1), p.530]
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[0;1]$.

II.3 Théorèmes de point fixe

Théorème 36 : [Gourdon, p.34]
Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E,d)$ une application telle que pour tout $(x,y) \in E^2$ avec $x \neq y$ on ait $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$.
Si (E,d) est compact, alors f admet un unique point fixe noté α.
De plus, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par récurrence par $x_0 \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Théorème 37 : [Gourdon, p.35]
Soit $f : (E,d) \longrightarrow (E,d)$ une application continue telle que pour tout $(x,y) \in E^2$ on ait $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$.
Si (E,d) est compact, alors f est une isométrie bijective.

Théorème 38 : Théorème du point fixe de Brouwer [Gourdon, p.52] :
Toute application continue d'un compact convexe dans lui-même admet au moins un point fixe.

Théorème 39 : Théorème du point fixe de Schauder :
Soient $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace vectoriel normé, C un convexe fermé non vide de F et $T : C \longrightarrow C$ une application continue.
Si $T(C)$ est relativement compact, alors T admet un point fixe.

II.4 Théorème de Stone-Weierstrass

Définition 40 : Sous-ensemble séparant/Sous-algèbre [Hassan, p.291] :
On considère $\mathcal{A}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{C}^0(E)$.
On dit que :
* $\mathcal{A}$ **sépare les points de** E lorsque pour tous $x, y \in E$ avec $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$ (autrement dit, $\mathcal{A}$ est une famille séparante).
* $\mathcal{A}$ est une **sous-algèbre de** $\mathcal{C}^0(E)$ lorsque pour tous $f, g \in \mathcal{A}$ et tout scalaire λ, $fg \in \mathcal{A}$ et $f + \lambda g \in \mathcal{A}$.

Lemme 41 : [Hassan, p.291]
Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales à coefficients réelles convergeant uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction racine carrée.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 0$.

Lemme 42 : [Hassan, p.292]
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\left(\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$.
Si (E,d) est compact, alors :
* $\overline{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.
* Pour tous $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, on a $\sup(f,g),\ \inf(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Lemme 43 : [Hassan, p.293]
Soit $\mathcal{A}$ une sous partie de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.
Si (E,d) est compact et que $\mathcal{A}$ vérifie :
* Pour tous $f, g \in \mathcal{A}$, on a $\sup(f,g),\ \inf(f,g) \in \mathcal{A}$.
* Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \lambda$.
* Pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \lambda$ et $f(y) = \mu$.

alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\left(\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Théorème 44 : Théorème de Stone-Weierstrass (1) [Hassan, p.293] :
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})$.
Si (E,d) est compact et que $\mathcal{A}$ vérifie :
* Pour tout $x \in E$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$.
* $\mathcal{A}$ sépare les points de X.

alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\left(\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Remarque 45 : [Hassan, p.294]
Pour avoir la première hypothèse du théorème précédent, il suffit que $\mathcal{A}$ contienne une fonction constante non nulle.

Théorème 46 : Théorème de Stone-Weierstrass (2) [Hassan, p.294] :
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(E,\mathbb{C})$.
Si (E,d) est compact et que $\mathcal{A}$ vérifie :
* Pour tout $x \in E$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$.
* $\mathcal{A}$ sépare les points de X. * Pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\left(\mathcal{C}^0(E,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty\right)$.

III Compacité dans les espaces vectoriels normés

III.1 Cas de la dimension finie

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie.

Théorème 47 : [Deschamps (1), p.299]
Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Remarque 48 :
Le résultat n'est plus vrai en dimension infinie.
En effet, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$, alors les normes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$$

sont non équivalentes sur E.

Corollaire 49 : [Gourdon, p.50]
Toute application linéaire de $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ dans $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ est continue.

Remarque 50 : [Gourdon, p.50]
L'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

n'est pas continue car $f(X^n) = n$ et $\|X\|^n = 1$

Corollaire 51 : [Gourdon, p.50]
$\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ est un espace vectoriel normé complet.

Remarque 52 : [Gourdon, p.50]
$\mathbb{R}[X]$ n'est jamais complet pour aucune norme.

Développement 2 : [A] [cf. DESCHAMPS (1) + HASSAN]

Théorème 53 : [Deschamps (1), p.301]
Si E est de dimension finie, alors les parties compactes de E sont exactement ses parties fermées bornées.

Remarque 54 : [Deschamps (1), p.292]
Le résultat est faux en dimension infinie !
En effet, dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$, on peut considérer la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est incluse dans la boule unité fermée mais qui est 1-écartée, donc ne peut pas admettre de sous-suite convergente.

Corollaire 55 : [Gourdon, p.50]
Tout sous-espace vectoriel de $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ est fermé.

Remarque 56 :
Le sous-espace des fonctions polynomiales sur $[0;1]$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ mais n'est pas fermé d'après le théorème de Weierstrass.

Développement 3 : [B] [cf. DESCHAMPS (1) + HASSAN]

Lemme 57 : Lemme de Riesz [Hassan, p.343] :
Soit M un sous-espace vectoriel fermé strict de E.
On a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists u \in E \text{ tq } \|u\|_E = 1 \text{ et } d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

Théorème 58 : Théorème de Riesz : [Hassan, p.343]
Les assertions suivantes sont équivalentes :
∗ E est de dimension finie.
∗ La boule unité fermée $\mathcal{B}_f(0,1)$ de $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ est compacte.

III.2 Quelques homéomorphismes

Corollaire 59 : [Rombaldi, p.756]
$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 60 : [Rombaldi, p.741]
Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Théorème 61 : [Rombaldi, p.741]
L'application :

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (\Omega, S) & \longmapsto & \Omega S \end{array} \right.$$

est un homéomorphisme.

Théorème 62 : [Rombaldi, p.771 + 780]
L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Remarques sur le plan

- Il faut bien illustrer cette leçon avec des exemples et non pas partir dans la compacité générale.
- On peut définir la compacité dans un espace topologique mais cela demande plus de précaution car certains résultats ne sont plus valides.
- On peut également parler du théorème d'Ascoli et de la notion de suite de fonctions équicontinue, d'opérateurs compacts, des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de compacité locale, etc.

Liste des développements possibles

- Théorème de Weierstrass.
- Théorème de Riesz.

Bibliographie

- Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.
- Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.
- Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.
- Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.
- Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.