LASOU Dimitri

Leçon : 151 : Dimension d'un e.v (dim finie). Rang. Exemples et Applications

Ref : Grifone, Gourdon, Perrin, FGN Algèbre 1

I) Espace vectoriel

On se place sur un corps $\mathbb{K}$.

Définition 1 : Un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

- C'est un groupe additif commutatif.
- Il dispose d'une loi de composition externe $\mathbb{K}\times E \to E$ vérifiant $\forall (x,y)\in E^2$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$

$\lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$

$(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$

$\lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x$

$1\cdot x = x$

Exemple 2 : × $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynôme est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

× $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 3 : i) $\lambda 0 = 0$

ii) $\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $x = 0$

iii) $(-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x)$

Définition 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide et si la restriction des lois à F en fait un espace vectoriel.

De manière équivalente :

$F\neq\emptyset$ et $\forall x,y\in F, \lambda\in\mathbb{K}$ $\quad x+y\in F$ et $\lambda x\in F$

Proposition 5 i) Si $x\in E$, $\mathbb{K}\cdot x$ est un sous-ev de E

ii) Si F et G sont des sev de E alors $F\cap G$ est aussi un sous espace vectoriel.

Définition 6 : Si F et G sont des sev de E, on pose

$F+G = \{f+g,\ f\in F, g\in G\}$. C'est un sev de E.

Si $A\subset E$, on note $\mathrm{vect}(A)$ le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. C'est l'espace vectoriel engendré par A.

Exemple 7 : Si $x\in E$, $\mathrm{vect}(\{x\}) = \mathbb{K}\cdot x$.

II) Dimension et rang d'une famille

Définition 8 : Une famille est dite génératrice si l'espace vectoriel engendré par la famille est E.

Remarque 9 : × Si $(v_1,\dots,v_p)$ est une famille $\mathrm{vect}(v_1,\dots,v_p) = \{\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_p v_p,\ \lambda_i\in\mathbb{K}\}$

× Il n'existe pas toujours de famille génératrice finie. exemple $\mathbb{K}[X]$.

Définition 10 : Un espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. (*)

Définition 11 : Une famille $(v_1,\dots,v_p)$ est libre si

$\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_p=0$

Dans le cas contraire, une famille est liée.

Proposition 12 : × Si une famille est liée alors un des vecteurs de la famille est dans l'espace engendré par les autres.

× Si une famille est libre, ~~et~~ x est dans l'espace engendré par cette famille $(v_1,\dots,v_p)$ alors $\exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$ tel que $x=\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i$

Définition 13 : Une famille libre et génératrice est une base de E. Dans une base tout $x\in E$ se décompose de manière unique sous l'écriture

$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

Théorème 14 : Tout espace vectoriel $E\neq\{0\}$ de dimension finie admet une base finie.

Toutes les bases ont le même cardinal.

On appelle dimension de E et on note $\dim_{\mathbb{K}} E$ le cardinal d'une base de E.

Théorème 15 : – On peut extraire une base de toute famille génératrice

– On peut compléter une famille libre en une base.

Proposition 16 : × Si F est un sous-ev de E de $\dim_{\mathbb{K}} E<+\infty$ alors

$\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$

Proposition 17 : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$

(*) On se place en dimension finie à partir de maintenant.

III) Applications linéaires

Définition 18 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. On dit que $f : E \to F$ est linéaire si $\forall (x,y) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
On note $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
et $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in E\}$
ce sont des sous espaces vectoriels de E et F.
On définie le rang de f par $rg(f) = \dim \operatorname{Im} f$.

Proposition 19 : f est surjective si $\operatorname{Im} f = F$
f est injective si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

Théorème 20 : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + rg\, F$

Corollaire 21 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, f est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective.

Définition 22 : Si $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ et $(f_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ sont des bases de E et F et $g \in \mathcal{L}(E,F)$ alors on associe à g

$$mat_{(e_i),(f_i)}\, g = \begin{pmatrix} g(e_1), \cdots, g(e_n) \end{pmatrix}$$ où $g(e_i)$ est le vecteur des coordonnées de $g(e_i)$ dans la base (f_i).

On définie le rang d'une matrice comme le rang de son application linéaire associée dans deux bases quelconques (cela ne dépends pas de la base).

DEV **Proposition 23** : Les sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall M \in E$, $rg\, M \leq 1$ sont de la forme $\{X^tY, Y \in L\}$ ou $\{X^tY, X \in L\}$ avec L sev de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 24 : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $rg(M)$ est la taille du plus grand mineur non nul de la matrice.

Proposition 25 : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N \in GL_n(\mathbb{C})$ alors
$$rg(MN) = rg(NM) = rg(M)$$

Proposition 26 : On peut calculer le rang d'une matrice grâce à l'algorithme du pivot de Gauss en se ramenant à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.
En effet la action de $GL_n(\mathbb{K})^2$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(P,Q).M = PMQ^{-1}$ définie une relation d'équivalence à n classes dont le rang est un invariant.

IV) Application à la réduction

Définition 27 : On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ associé au vecteur propre x si $u(x) = \lambda x$.
On définit $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$ l'espace propre de f associé à λ.

Propriété 28 : Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont les valeurs propres de u alors les E_{λ_i} sont en somme directe.

Définition 29 : On note $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ le polynome caractéristique associé à A. Si λ est une valeur propre de A alors $P_A(\lambda) = 0$.

Proposition 30 :
- Si F est un sev de E stable par f alors $P_{f|_F}$ divise P_f.
- Si f est nilpotent alors $P_f = X^n$.

Proposition 31 :
- Si P_f a ses racines simples alors f est diagonalisable.
- Sont équivalents :
  - (i) f diagonalisable
  - (ii) P_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ_i de multiplicité h_i, $h_i = \dim E_{\lambda_i}$
  - (iii) $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$

Proposition 32 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \cdots P_k$ avec $P_i \wedge P_j = 1$ si $i \neq j$ alors $\operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} P_i(f)$

Définition 33 : On note ~~N_i~~ pour $P_f = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X-\lambda_k)^{\alpha_k}$,
$N_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique de f associé à λ.
On a $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$

Théorème de réduction de Jordan 34

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que P_f est scindé dans $\mathbb{K}$: $P_f = \prod_{i=1}^{k} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$

Alors ~~mat~~ il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix} \text{ où } A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \nu_1^i & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \nu_{\alpha_i-1}^i \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$$

et $\nu_j^i \in \{0,1\}$

Remarque 35 : On utilise souvent la dimension pour raisonner par récurrence.

Exemple 36 : Si M et ${}^tM$ commutent alors M est diagonalisable dans une base orthonormée.

V) Théorie des corps

Definition 37 : Si $K \subset L$ sont deux corps alors on dit que L est une extension de K.

proposition 38 : Si K est un sous-corps (ie L est une extension de K) alors L est un ~~K~~-espace vectoriel.

Si $\dim_K L$ est finie alors on pose $[L:K] = \dim_K L$.

proposition 39 : Si $K \subset L \subset M$ sont des corps tels que $(e_i)_{i\in I}$ est une base de L sur $\mathbb{K}$ et $(f_j)_{j\in J}$ base de M sur L alors $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de M sur K.

Si $[M:L] < +\infty$ et $[L:K] < +\infty$ alors $[M:K] = [M:L][L:K]$

Definition ~~39~~ 40 : Si $K \subset L$ et $\alpha \in L$, on note $K[\alpha]$ le sous anneau de L engendré par K et α et $K(\alpha)$ le plus petit corps le contenant.

Si $\phi : K[T] \to L$ est un morphisme alors
$$T \mapsto \alpha$$
$$k \in K \mapsto k$$

ϕ injectif $\Rightarrow$ α est transcendant sur K et ϕ non injectif implique α algébrique sur K.

proposition 41

Si L est une extension de K et $\alpha \in L$ alors

α algébrique sur K

$\iff K[\alpha] = K(\alpha)$

$\iff \dim_K K[\alpha] < +\infty$

$\iff \exists P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0$

Exemple 42 :

* $\sqrt{2}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$
* i est algébrique sur $\mathbb{Q}$

Remarque 43 : on peut montrer que e, π sont transcendants sur $\mathbb{Q}$