Leçon 201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Sans sortir du programme, il y a au moins deux thèmes très riches pour nourrir le plan : espaces de fonctions continues sur un compact, espaces L^p sur le cercle ou sur la droite réelle.
Sur le premier sujet, le jury attend une bonne familiarité avec la convergence uniforme et son utilisation pour justifier des régularités. Le théorème de Stone-Weierstrass est évidemment incontournable, dans ses différentes versions, constructives ou non. La complétude peut également être exploitée, par exemple en lien avec les équations différentielles ou intégrales.
Sur le second, la convolution et ses applications, ainsi que l'analyse de Fourier fournissent un large terrain d'exploration.
Plusieurs prolongements s'offrent aux candidates et candidats solides : théorème de Baire et ses innombrables applications, espaces de fonctions holomorphes (théorème de Montel et ses applications, espaces de Hardy, etc.), espaces de fonctions régulières (fonctions lipschitziennes, $\mathcal{C}^k$, classe de Schwartz), algèbres de Banach de fonctions (algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$, algèbre du disque, algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, etc.), étude des parties compactes de $\mathcal{C}^0(K)$ (K compact) voire de L^p.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 201 intitulée : "Espaces de fonctions. Exemples et applications.". L'étude des fonctions pour elles-mêmes ne commence que relativement tardivement, au XIXème siècle avec la tradition analytique de Cauchy et d'Abel d'explorer les propriétés générales de classes de fonctions. Mais le véritable essor des espaces de fonctions en tant que structures dont on exploite les propriétés pour résoudre des problèmes fonctionnels n'arrive qu'au XXème siècle, avec le développement de la théorie de la mesure et de l'intégration ou les travaux sur les topologies de tels espaces. C'est donc de cette prolifération d'espaces de fonctions que nous essayons de faire ressortir la fécondité du travail sur leur structure globale plus que sur les fonctions particulières elles-mêmes.
Dans une première partie on parle de l'espace des fonctions continues sur un compact en commençant par quelques généralités. On rappelle ainsi la définition d'une application continue et la propriété d'espace vectoriel de cet espace avant de continuer par le théorème de Heine qui nous sera utile pour la suite et la définition de la convergence uniforme. Dans un deuxième point on s'intéresse à la densité de sous-espaces en commençant par le théorème de Weierstrass qui donne la densité des polynômes dans l'espace des fonctions continues sur un compact puis de manière plus générale à la densité d'une sous-algèbre avec le théorème de Stone-Weierstrass. On termine cette première partie avec le théorème d'Ascoli qui repose que la notion d'équicontinuité et qui donne des corollaires assez intéressants sur la notion de relative compacité.
Dans une deuxième partie on s'intéresse aux espaces de fonctions intégrables en commençant par quelques rappels sur ces espaces : on en donne la définition ainsi que les inégalités de Hölder et de Minkowski qui leur donne une structure d'espace vectoriel normé puis on rappelle également le théorème de Riesz-Fisher et la rôle particulier de $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Dans un deuxième point on s'intéresse une nouvelle fois à des résultats de densité en commençant par deux théorèmes avant de continuer avec la notion de produit de convolution qui possède de bonnes propriétés et grâce à la notion d'approximation de l'unité on obtient le théorème d'approximation dans $L^1(\mathbb{R})$ ainsi que le théorème qui suit qui donne en corollaire un résultat de densité très important qui est utilisé pour donner des propriétés sur la transformation de Fourier par exemple. On passe ensuite au cas de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ en introduisant la définition ainsi que quelques propriétés fondamentales puis en donnant deux exemples de calcul de transformée de Fourier et on termine ce point avec l'injectivité de la transformée de Fourier ainsi que la formule d'inversion. On s'intéresse finalement à l'espace de Schwartz où la transformée de Fourier possède énormément de bonnes propriétés, à savoir la stabilité de l'espace par transformation de Fourier ainsi que la bijectivité de la transformation de Fourier dans cet espace.
Enfin, on termine cette leçon avec un dernier point consacré aux espaces de fonctions avec une structure hilbertienne en commençant par le cas des séries de Fourier. On rappelle alors les définitions de base avant de passer au théorème de Féjer qui donne un résultat de densité ainsi que le corollaire qui suit, puis la formule de Parceval. Ces

résultats donnent une forte utilisé aux séries de Fourier : calculer des sommes (comme on peut le voir dans l'exemple qui suit). On conclut avec une application aux polynômes orthogonaux où l'on introduit les espaces à poids puis on s'intéresse à l'existence d'une base hilbertienne via les polynômes orthogonaux.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces de fonctions continues sur un compact

Dans toute cette partie, on considère (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques.

I.1 Généralités

Définition 1 : Application continue :
Une application $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ est **continue en** $a \in X$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall x \in X,\ (d(a, x) \leq \eta) \implies (d'(f(a), f(x)) \leq \varepsilon)$$

Proposition 2 :
L'ensemble des fonctions continues sur X est à valeurs dans $\mathbb{K}$ (noté $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 3 :
* Une fonction lipschitzienne est uniformément continue (donc continue).
* La fonction définie sur $]0; 1]$ par $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue mais pas uniformément continue.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que (X, d) est compact.

Proposition 4 : [Deschamps, p.293]
L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Théorème 5 : Théorème de Heine [Deschamps, p.295] :
Toute application continue continue sur un compact est uniformément continue.

Définition 6 : Convergence uniforme [Hassan, p.272] :
On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de X dans Y **converge uniformément** vers une application $f : X \longrightarrow Y$, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \implies (d'(f_n(x); f(x)) < \varepsilon)$$

Remarque 7 : [Hassan, p.272]
Pour un $\varepsilon > 0$ donné, l'entier naturel N qui figure dans la définition précédente est indépendant dans de x. C'est toute la différence avec la notion de convergence simple.

I.2 Densité

Développement 1 : [cf. DESCHAMPS]

Lemme 8 : [Deschamps, p.994]
Soient f une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, $x \in [0;1]$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(x)$ et $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall (t,u) \in [0;1]^2,\ |f(t) - f(u)| \leq M(t-u)^2 + \varepsilon$$

En particulier, on a $|\mathbb{E}(f(Y_n)) - f(x)| \leq M\operatorname{Var}(Y_n) + \varepsilon \leq \frac{M}{4n} + \varepsilon$

Théorème 9 : Théorème de Weierstrass [Deschamps, p.994] :
Si l'on considère les polynômes de Bernstein définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

alors la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

Corollaire 10 : [Deschamps, p.530]
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$, alors f est nulle sur $[0;1]$.

Définition 11 : Sous-ensemble séparant/Sous-algèbre [Hassan, p.291] :
On considère $\mathcal{A}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{C}^0(X)$.
On dit que :
* $\mathcal{A}$ **sépare les points de** X lorsque pour tous $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$ (autrement dit, $\mathcal{A}$ est une famille séparante).
* $\mathcal{A}$ est une **sous-algèbre de** $\mathcal{C}^0(X)$ lorsque pour tous $f, g \in \mathcal{A}$ et tout scalaire λ, $fg \in \mathcal{A}$ et $f + \lambda g \in \mathcal{A}$.

Lemme 12 : [Hassan, p.291]
Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales à coefficients réelles convergeant uniformément sur $[0;1]$ vers la fonction racine carrée.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(0) = 0$.

Lemme 13 : [Hassan, p.292]
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\left(\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$.
Si (X,d) est compact, alors :
* $\overline{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$.
* Pour tous $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$, on a $\sup(f,g),\ \inf(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Lemme 14 : [Hassan, p.293]
Soit $\mathcal{A}$ une sous partie de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$.
Si (X,d) est compact et que $\mathcal{A}$ vérifie :
* Pour tous $f, g \in \mathcal{A}$, on a $\sup(f,g),\ \inf(f,g) \in \mathcal{A}$.
* Pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \lambda$.
* Pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \lambda$ et $f(y) = \mu$.
alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\left(\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Théorème 15 : Théorème de Stone-Weierstrass (1) [Hassan, p.293] :
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$.
Si (X,d) est compact et que $\mathcal{A}$ vérifie :
* Pour tout $x \in E$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$.
* $\mathcal{A}$ sépare les points de X.
alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\left(\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Remarque 16 : [Hassan, p.294]
Pour avoir la première hypothèse du théorème précédent, il suffit que $\mathcal{A}$ contienne une fonction constante non nulle.

Théorème 17 : Théorème de Stone-Weierstrass (2) [Hassan, p.294] :
Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$.
Si (X,d) est compact et que $\mathcal{A}$ vérifie :
* Pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$.
* $\mathcal{A}$ sépare les points de X. * Pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\overline{f} \in \mathcal{A}$.
alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\left(\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty\right)$.

I.3 Le théorème d'Ascoli

Définition 18 : Équicontinuité en un point [Hassan, p.284] :
On considère $\mathcal{H}$ une partie de Y^X.
On dit que $\mathcal{H}$ est **équicontinue en** $x_0 \in X$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V_{x_0}$ et pour tout $f \in \mathcal{H}$, on ait $d'(f(x_0), f(x)) \leq \varepsilon$.

Remarque 19 : [Hassan, p.284]
Toute application équicontinue en un point est continue en un point mais la réciproque est fausse.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \longmapsto \sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier en 0) mais la famille $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas équicontinue en 0.

Exemple 20 : [Hassan, p.284]
∗ Toute partie finie de $\mathcal{C}^0(X,Y)$ est équicontinue.
∗ La réunion de deux parties équicontinues en $x_0 \in X$ est équicontinue en x_0.
∗ Si $k>0$, alors l'ensemble des applications k-lipschitziennes d'un espace métrique dans une autre est une partie équicontinue.

Théorème 21 : Théorème d'Ascoli [Hassan, p.287]
Soit $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}^0(X,Y)$.
$\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\left(\mathcal{C}^0(X,Y), \|\cdot\|_\infty\right)$ si, et seulement si, $\mathcal{H}$ est équicontinue et pour tout $x \in X$, $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact dans Y.

Corollaire 22 : [Hassan, p.289]
Si (X,d) et (Y,d') sont compacts, alors les parties relativement compactes dans $\left(\mathcal{C}^0(X,Y), \|\cdot\|_{cu}\right)$ sont exactement les parties équicontinues.

Corollaire 23 : [Hassan, p.289]
Soit $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R}^n)$.
Si X est compact et que $\mathbb{R}^n$ est muni d'une distance équivalente à la distance euclidienne, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
∗ $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $\left(\mathcal{C}^0\left(X,\mathbb{R}^n\right), \|\cdot\|_{cu}\right)$.
∗ $\mathcal{H}$ est équicontinue et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}(x)$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$.

II Espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

II.1 Généralités

Dans toute cette sous-partie, on considère un espace mesuré $(X,\mathcal{F},\mu)$.

Définition 24 : Espaces $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^\infty$ [El Amrani, p.417] :
On considère $p \in [1;+\infty[$.
On appelle :
∗ **espace** $\mathcal{L}^p$ l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < +\infty$.
∗ **espace** $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions mesurables f telles que :

$$\|f\|_{\infty,ess} = \{\inf M>0 \text{ tq } \mu(\{|f|>M\})=0\} < +\infty$$

Remarque 25 : [El Amrani, p.417]
L'espace $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel mais l'application $f \longmapsto \|f\|_p$ n'est qu'une semi-norme dessus... En effet, $\|f\|_p = 0$ n'entraîne pas que $f=0$ mais seulement que $f \underset{\mu-p.p.}{=} 0$!

Définition 26 : Espaces L^p [El Amrani, p.417] :
On considère $p \in [1;+\infty]$.
On appelle **espace** L^p l'espace $\mathcal{L}^p$ quotienté par la relation d'équivalence $\sim$ définie par :

$$\forall f,g \in \mathcal{L}^p(X,\mathcal{F},\mu),\ (f \sim g) \iff (f \underset{\mu-p.p.}{=} g)$$

Proposition 27 : Inégalités de Hölder et de Minkowski [Faraut, p.42] :
Soient $p \in [1;+\infty[$ et q sont exposant conjugué.
∗ Pour tout $(f,g) \in L^p(X,\mathcal{F},\mu) \times L^q(X,\mathcal{F},\mu)$, on a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
∗ Pour toutes fonctions $f,g \in L^p(X,\mathcal{F},\mu)$, on a :

$$\left(\int_X |f+g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

avec cas d'égalité lorsque $p=1$ et f et g presque-partout positivement liées.

Corollaire 28 : [El Amrani, p.417]
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour tout $p \in [1;+\infty]$, $\left(L^p(X,\mathcal{F},\mu), \|\cdot\|_p\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Théorème 29 : Théorème de Riesz-Fischer : [Faraut, p.46 + 47]
Pour $p \in [1;+\infty]$, l'espace $L^p(X,\mathcal{F},\mu)$ est un espace de Banach pour $\|\cdot\|_p$.

Corollaire 30 : [Faraut, p.49]
L'espace $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$<\cdot;\cdot>: \left| \begin{array}{ccc} \left(L^2(X,\mathcal{F},\mu)\right)^2 & \longrightarrow & L^2(X,\mathcal{F},\mu) \\ (f,g) & \longmapsto & \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x) \end{array} \right.$$

II.2 Densité dans les espaces L^p

Dans toute cette sous-partie, on considère un espace mesuré $(X,\mathcal{F},\mu)$.

Théorème 31 :
Pour tout réel $p \in [1;+\infty]$, l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^p(X,\mathcal{F},\mu)$.

Remarque 32 :
Ce résultat est très utile en théorie de l'intégration lorsque l'on veut montrer une propriété : on la montre pour les indicatrices, puis les fonctions étagées et enfin par densité la propriété est vraie pour les fonctions dans $L^p(X,\mathcal{F},\mu)$.

Théorème 33 :
L'ensemble des fonctions continues à support compact sur un ouvert de $\mathbb{R}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p \in [1; +\infty[$.

Définition 34 : Produit de convolution [El Amrani, p.75] :
On dit que deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont **convolables** lorsque, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable.
On définit alors le **produit de convolution de** f **et de** g par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 35 : [El Amrani, p.78 + 80 + 81]
Soit $p \in [1; +\infty[$ et q sont exposant conjugué.
$*$ Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
$*$ Pour tous $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
$*$ Pour tous $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, $f * g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
De plus, $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et si $p \neq 1$, alors $f * g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque 36 : [El Amrani, p.78 + 85]
La convolution est commutative, associative et bilinéaire sur $L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit, $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p, +, \cdot, *)$ est une algèbre de Banach commutative (elle est cependant sans unité !).

Définition 37 : Approximation de l'unité [El Amrani, p.86] :
On appelle **approximation de l'unité** dans $L^1(\mathbb{R})$ toute suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$*$ $\forall j \in \mathbb{N},\ \varphi_j \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 1$. $(*)$
$*$ $\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{j \to +\infty} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 0$.

Exemple 38 : [El Amrani, p.86]
$*$ $\varphi_j(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|}$ (approximation de Laplace).
$*$ $\varphi_j(x) = \frac{j}{\pi} \frac{1}{1+j^2x^2}$ (approximation de Cauchy).
$*$ $\varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{j^2x^2}{2}}$ (approximation de Gauss).

Théorème 39 : Théorème d'approximation dans $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.87] :
Soient $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité, $p \in [1; +\infty[$ et f une application de la variable réelle.
$*$ Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, alors $(f * \varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
$*$ Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $(f * \varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Définition 40 : Suite régularisante [El Amrani, p.94] :
On appelle **suite régularisante de** $\mathbb{R}$ toute suite $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de fonctions qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(*)$ de la définition 37 et telle qu'il existe une autre suite $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ décroissante et tendant vers 0 telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq \mathcal{B}_o(0, \varepsilon_j)$.

Théorème 41 : [El Amrani, p.95]
Soient $p \in [1; +\infty[$ et $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite régularisante.
$*$ Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ et tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$f * \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ f * \varphi_j \in L^p(\mathbb{R}) \text{ et } \lim_{j \to +\infty} \|f * \varphi_j - f\|_p = 0$$

$*$ Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on a $f * \varphi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et la suite $(f * \varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Corollaire 42 : [El Amrani, p.96]
Soit $p \in [1; +\infty[$.
L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

II.3 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 43 : Trans. de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.109 + 110] :
On considère $f \in L^1(\mathbb{R})$.
On appelle **transformée de Fourier de** f l'application :

$$\widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Puis **transformation de Fourier** l'application :

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Lemme 44 : Lemme de Riemann-Lebesgue [El Amrani, p.109] :
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ existe et on a $\lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Théorème 45 : [El Amrani, p.110]
Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$.

Corollaire 46 : [El Amrani, p.111]
La transformation de Fourier est une application qui est linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemple 47 : [El Amrani, p.111]
On considère l'application $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.
On a $p \in L^1(\mathbb{R})$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout réel $A > 0$ fixé, on a :

$$\int_{-A}^{A} e^{-|x|}e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{1-e^{-A(1-i\xi)}}{1-i\xi} + \frac{1-e^{-A(1+i\xi)}}{1+i\xi}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient : $\mathcal{F}(p)(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$.

Exemple 48 : [El Amrani, p.111]
On considère $[a;b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f = \mathbb{1}_{[a;b]}$ (avec $a < b$).
La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_a^b e^{-ix\xi}\mathrm{d}x = \frac{e^{\frac{i(b-a)\xi}{2}} - e^{-\frac{i(b-a)\xi}{2}}}{i\xi}e^{-\frac{i(a+b)\xi}{2}}$$

Et comme $\widehat{f}(0) = b-a$, on a finalement :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)}{\xi}e^{-\frac{i(a+b)\xi}{2}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b-a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Proposition 49 : [El Amrani, p.114]
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Remarque 50 : [El Amrani, p.114]
On peut montrer grâce à ce résultat qu'il n'y a pas d'élément neutre pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 51 : [El Amrani, p.112]
Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.
On a $\mathcal{F}\left(x \longmapsto e^{-bx^2}\right) : \xi \longmapsto \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$.

Théorème 52 : Formule de dualité [El Amrani, p.115] :
Pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)g(v)\mathrm{d}v$.

Théorème 53 : [El Amrani, p.115]
La transformation de Fourier est une application injective.

Exemple 54 : [El Amrani, p.116]
L'équation $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$ n'admet pas de solutions dans $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 55 : Formule d'inversion [El Amrani, p.116] :
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$

II.4 Classe de Schwartz

Définition 56 : Fonction à décroissance rapide [El Amrani, p.133] :
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.
On dit que f est une **fonction à décroissance rapide** lorsque pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{|x|\to+\infty} |x^\alpha f(x)| = 0$.

Définition 57 : Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ [El Amrani, p.134] :
On appelle **espace de Schwartz** l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et f est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

Exemple 58 : [El Amrani, p.134]
Tout élément de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Remarque 59 : [El Amrani, p.133]
Décroissance rapide n'a pas de lien avec la monotonie.
En effet, la fonction $x \longmapsto \sin(x)e^{-|x|}$ est à décroissance rapide.

Proposition 60 : [El Amrani, p.134]
L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel stable par produit, par dérivation ainsi que par multiplication par un polynôme.

Théorème 61 : [El Amrani, p.135]
L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformation de Fourier.

Théorème 62 : [El Amrani, p.135]
La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective et bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et l'application inverse est donnée par $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}$.

Remarque 63 : [El Amrani, p.136]
On considère $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur $[-1;1]$.
En considérant les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right) \text{ et } f_n = \varphi_n f$$

On obtient que chaque f_n appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et donc que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 64 : [El Amrani, p.136]
L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

III Espaces de fonctions avec une structure hilbertienne

III.1 Séries de Fourier

Définition 65 : Exponentielle modèle [El Amrani, p.172] :
On considère $n \in \mathbb{Z}$.
On définit par e_n **l'élément de** $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ **tel que** $e_n(x) = e^{inx}$.

Proposition 66 : [El Amrani, p.172]
La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée.

Définition 67 : n-ième coefficient de Fourier [El Amrani, p.173] :
On considère $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
On appelle **n-ième coefficient de Fourier de** f (et noté $c_n(f)$) le nombre complexe $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$.

Proposition 68 : [El Amrani, p.175]
L'application γ définie de $L^1_{2\pi}$ dans $c_0(\mathbb{Z})$ par $\gamma(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme d'algèbres de $\left(L^1_{2\pi}, \|\cdot\|_1\right)$ dans $\left(c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty\right)$ qui est continu et de norme 1.

Théorème 69 : Théorème de Féjer [El Amrani, p.190] :
Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue (resp. dans L^p pour $p \in [1;+\infty[$) et 2π-périodique :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0 \quad \text{(respectivement } \lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0)$$

Corollaire 70 : [El Amrani, p.173]
La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Théorème 71 : Formule de Parceval [El Amrani, p.193] :
Soit $f \in L^2_{2\pi}$.
* $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f en moyenne quadratique.
* On a : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ (formule de Parseval).

Corollaire 72 :
L'application γ est un isomorphisme isométrique de $\left(L^2_{2\pi}, \|\cdot\|_2\right)$ dans $\left(\ell^2(\mathbb{Z}, \|\cdot\|_2\right)$.

Exemple 73 : [El Amrani, p.210]
En considérant la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi;\pi]$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

III.2 Application aux polynômes orthogonaux

Dans toute cette sous-partie, on considère un intervalle $I =]a;b[$ borné ou non de $\mathbb{R}$.

Définition 74 : Fonction poids [El Amrani, p.40] :
On appelle **poids sur** I une application $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$.

Définition 75 : L'espace $L^2(I,\rho)$:
On appelle **espace** $L^2(I,\rho)$ l'ensemble $\left\{f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \int_I |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty\right\}$.

Proposition 76 : [El Amrani, p.41]
L'espace $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert et tout polynôme appartient à $L^2(I,\rho)$.

Théorème 77 : [El Amrani, p.41]
Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(L^2(I,\rho)\right)^{\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux et tels que $\deg(P_n) = n$ (cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée au poids ρ).

Exemple 78 : [El Amrani, p.41]
* Si $I = \mathbb{R}_+^*$ et $\rho(x) = e^{-x}$, on obtient alors les polynômes de Laguerre.
* Si $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$, on obtient alors les polynômes de Hermite.
* Si $I =]-1;1[$ et $\rho(x) = 1$, on obtient alors les polynômes de Legendre.
* Si $I =]-1;1[$ et $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on obtient alors les polynômes de Tchebychev.

Développement 2 : [cf. EL AMRANI]

Théorème 79 : [El Amrani, p.47]
Soit ρ une fonction poids sur I.
S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$, alors les polynômes orthogonaux normalisés associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Remarque 80 : [El Amrani, p.46]
L'hypothèse faite sur ρ n'est pas superflue. En effet, en considérant $I =]0;+\infty[$, $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$ et $f(x) = \sin(2\pi\ln(x))$, on a $\int_I f(x)x^n\rho(x)\mathrm{d}x = 0$.

Remarques sur le plan

— Il faut bien être au point sur l'équicontinuité et le théorème d'Ascoli et donner des résultats sur les ensembles de fonctions que les fonctions elles-même !

— Dans ce leçon, on peut également parler de l'espace des fonctions holomorphes, de l'espace de Bergman ou encore des fonctions linéaires entre 2 espaces de Banach..

Liste des développements possibles

— Théorème de Weierstrass.

— Polynômes orthogonaux.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

— Jacques Faraut, *Calcul intégral*.