

Léon 221: Equations différentielles linéaires Systèmes différentiels linéaires - Exemples et applications

Références: Berkelín, Dematly, Francœur 4

I - Equations différentielles linéaires à coefficients constants

1) Définitions et Théorie de Cauchy - Lipschitz

2) Résolution dans le cas constant

a) Cas homogène: exponentielle d'endomorphismes

b) Cas non homogène: variation de la constante

c) Quelques exemples

3) Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre $n \geq 2$
coeff constants

II - Equations différentielles linéaires - Cas général

1) Structure de l'ensemble des solutions

2) Résolvante d'un système différentiel

3) Wronskien d'un système différentiel

III - Etude qualitative

1) Portrait de phase en dimension 2

2) Localisation des zéros (ou fonctions de Bessel...)

DEV 1: Cauchy-Lipschitz

DEV 2: Equation de la chaleur

Chap 22.1: Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Equations différentielles linéaires à coefficients constants

1) Définitions et Théorème de Cauchy-Lipschitz

DEF 1: Soient $N, n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^N)^n$. Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}^N$. Une équation différentielle d'ordre n de type n -adé est une équation de la forme $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ pour $(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in \Omega, t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{K}^N$.

DEF 2: Une solution de cette équation est un couple (I, y) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, y une fonction n fois dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}^N$ telle que pour tout $t \in I$, $(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \in \Omega$ et $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$.

REM 3: On a l'impression intuitif avec $n=1: y' = f(t, y(t))$.

DEF 4: Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Le problème de Cauchy avec donnée initiale (t_0, y_0) consiste à trouver la (ou les) solution(s) de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle I telle(s) que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

DEF 5: On dit que $(\mathcal{E})$ est linéaire lorsque $f(t, y) = A(t)y + B(t)$ où $A: I \rightarrow M_N(\mathbb{K})$ et $B: I \rightarrow \mathbb{K}^N$.

Si B est la fonction nulle, on parle d'équation homogène. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Une fonction $y: I \rightarrow \mathbb{K}^N$ est une solution de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$ si et seulement si y est continue.

PROP 6: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}^N$ continue. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Une fonction $y: I \rightarrow \mathbb{K}^N$ est une solution de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0) = y_0$ si et seulement si y est continue pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in \Omega$ et $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$.

PROP 7: (Généralité différentielle) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Supposons que $v(t) \leq u(t) \leq v(t)$. Alors pour tout $t \in I$, $t \geq t_0$, $u(t) \leq v(t)$.

PROP 8: (Généralité intégrale) Soient $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Supposons $u, v \geq 0$ et que pour tout $t \in I$, $t \geq t_0 \Rightarrow u(t) \leq a + \int_{t_0}^t u(s) ds$ et $v(t) \leq a + \int_{t_0}^t v(s) ds$. Alors, pour tout $t \in I$, $t \geq t_0 \Rightarrow u(t) \leq a e^{\int_{t_0}^t u(s) ds}$.

TH 9: (Cauchy-Lipschitz linéaire) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{C}(I, M_N(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$. Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une unique solution de $y' = A(t)y + B(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

EX 10: $y:]1; 2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(t) = e^{-t}$ est une solution de $y' = y$ telle que $y(1) = 1$. Vérifiez donc la seule sur $]1; 2[$.

2) Réduction dans le cas constant

a) Cas homogène: exponentielle et endomorphismes

DEF 11: Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ converge dans $M_N(\mathbb{K})$ et on note $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

PROP 12: Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\phi(t) = e^{tA}$. Alors, ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et: $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = A e^{tA} = t A A$.

PROP 13: Soient $A, B \in M_N(\mathbb{K})$. On a les propriétés suivantes:

- ① Si $AB = BA$, alors $\exp(AB) = \exp(A)\exp(B)$,
- ② $e^A \in GL_N(\mathbb{K})$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$,
- ③ $(e^A)^* = e^{A^*}$.

PROP 14: Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. Les solutions de $(\mathcal{H}_A): y' = Ay$ sont les $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^N$ et C où $C \in \mathbb{K}^N$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{K}^N$, la solution de $(\mathcal{H}_A)$ telle que $y(t_0) = y_0$ est $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^N$ telle que $y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0$.

REM 15: Il est souvent utile de noter la matrice A pour calculer $\exp(A)$: on peut diagonaliser ou décomposer la décomposition de Dunford de A .

EX 16: Les solutions du système $\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ sont

EX 17: Les solutions du système $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y \end{cases}$ sont

2) Cas non homogène : variation de la constante
 Dans cette partie, on considère l'équation différentielle
 linéaire non homogène ($\mathcal{L}$): $y' = Ay + B(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 et $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$

54 METHODE 18: On dispose déjà des solutions de l'équation
 homogène associée, pour la forme $t \mapsto e^{tA}C$, $C \in \mathbb{K}^n$.
 La méthode de la variation de la constante consiste
 à chercher les solutions de ($\mathcal{L}$) sous la forme
 $y(t) = e^{tA}C(t)$ où $C: I \rightarrow \mathbb{K}^n$. On dérive y et après identification
 on obtient: y solution $\Leftrightarrow C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(s)^{-1} B(s) ds$

PRO 19 (Formule de Duhamel): On obtient la formule
 suivante pour la solution de ($\mathcal{L}$) telle que $y(t_0) = y_0$:
 $y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds$

c) Quelques exemples

EX 20: La solution du problème de Cauchy $y'' - 2y' + y = e^t$
 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ est $y(t) = (t+1)e^t$

EX 21: La solution du système d'équations
 différentielles $\begin{cases} x' = 2x - y - 5t \\ y' = 3x + 6y - 1 \end{cases}$ est
 $\begin{cases} x(t) = 3e^{3t} - 3e^{2t} + 1 \\ y(t) = 3e^{3t} - 3e^{2t} + 1 \end{cases}$

EX 22 (équation de la chaleur) Soit $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non nulle,
 continue et π -périodique en x par morceaux. L'équation
 de la chaleur $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, x) = u_0(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

possède une unique solution et π -périodique
 continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

DEF 23: On considère dans cette partie des équations de la forme
 $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(t)$ (b_n). On s'intéressera
 particulièrement au cas homogène ($b_n = 0$).

REM 24: On met ($\mathcal{L}_n$) sous la forme ($\mathcal{Y}$): $Y' = AY + B(t)$ avec
 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (matrice compagnon) et $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$

DEF 25: Le polynôme caractéristique associé à ($\mathcal{L}_n$) est le polynôme
 $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ qui n'est autre que χ_A .
 L'équation caractéristique associée à ($\mathcal{L}_n$) est $P(X) = 0$.

THM 26: Soit $\mu_1, \dots, \mu_p$ les racines complexes de multiplicités
 $m_1, \dots, m_p$ du polynôme caractéristique P associé à ($\mathcal{L}_n$).
 Alors les solutions de ($\mathcal{L}_n$) avec $\lambda_{0,i} \in \mathbb{C}$ sont:
 $y(t) = \lambda_{1,1} t^{m_1-1} e^{\lambda_{1,1} t} + \dots + \lambda_{1,m_1} t e^{\lambda_{1,1} t} + \dots + \lambda_{p,1} t^{m_p-1} e^{\lambda_{p,1} t} + \dots + \lambda_{p,m_p} t e^{\lambda_{p,1} t}$

avec $\lambda_{i,k} \in \mathbb{C}$ des constantes quelconques.
THM 27: On suppose les $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Soient $\mu_1, \dots, \mu_p$ les racines réelles
 de P de multiplicités $m_1, \dots, m_p$. Soient $\mu_{p+1}, \dots, \mu_{p+q}$ les racines
 imaginaires complexes de multiplicités $m_{p+1}, \dots, m_{p+q}$ de P . Notons
 $\mu_k = \alpha_k + i\omega_k, \lambda_k \in \mathbb{R}, \omega_k \in \mathbb{R}$. Alors les solutions réelles de ($\mathcal{L}_n$) sont:
 $y(t) = \lambda_{1,1} t^{m_1-1} e^{\lambda_{1,1} t} + \dots + \lambda_{1,m_1} t e^{\lambda_{1,1} t} + \dots + \lambda_{p,1} t^{m_p-1} e^{\lambda_{p,1} t} + \dots + \lambda_{p,m_p} t e^{\lambda_{p,1} t}$

+ $\lambda_{p+1,1} t^{m_{p+1}-1} e^{\lambda_{p+1,1} t} + \dots + \lambda_{p+1,m_{p+1}} t e^{\lambda_{p+1,1} t} + \dots + \lambda_{p+q,1} t^{m_{p+q}-1} e^{\lambda_{p+q,1} t} + \dots + \lambda_{p+q,m_{p+q}} t e^{\lambda_{p+q,1} t}$

+ $\lambda_{p+q+1,1} t^{m_{p+q+1}-1} e^{\lambda_{p+q+1,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+1,m_{p+q+1}} t e^{\lambda_{p+q+1,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q,1} t^{m_{p+q+q}-1} e^{\lambda_{p+q+q,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q,m_{p+q+q}} t e^{\lambda_{p+q+q,1} t}$

+ $\lambda_{p+q+q+1,1} t^{m_{p+q+q+1}-1} e^{\lambda_{p+q+q+1,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q+1,m_{p+q+q+1}} t e^{\lambda_{p+q+q+1,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q+q,1} t^{m_{p+q+q+q}-1} e^{\lambda_{p+q+q+q,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q+q,m_{p+q+q+q}} t e^{\lambda_{p+q+q+q,1} t}$

+ $\lambda_{p+q+q+q+1,1} t^{m_{p+q+q+q+1}-1} e^{\lambda_{p+q+q+q+1,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q+q+1,m_{p+q+q+q+1}} t e^{\lambda_{p+q+q+q+1,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q+q+q,1} t^{m_{p+q+q+q+q}-1} e^{\lambda_{p+q+q+q+q,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q+q+q,m_{p+q+q+q+q}} t e^{\lambda_{p+q+q+q+q,1} t}$

+ $\lambda_{p+q+q+q+q+1,1} t^{m_{p+q+q+q+q+1}-1} e^{\lambda_{p+q+q+q+q+1,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q+q+q+1,m_{p+q+q+q+q+1}} t e^{\lambda_{p+q+q+q+q+1,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q+q+q+q,1} t^{m_{p+q+q+q+q+q}-1} e^{\lambda_{p+q+q+q+q+q,1} t} + \dots + \lambda_{p+q+q+q+q+q,m_{p+q+q+q+q+q}} t e^{\lambda_{p+q+q+q+q+q,1} t}$

[B36] PROP 33: Soient $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. La solution maximale (globale) de $y' = a(t)y + b(t)$ avec $y(t_0) = y_0$ est: $y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t b(s) e^{\int_{t_0}^s a(u) du} e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} ds$

[B73] EX 34: Les solutions de $y' + ty = t$ sont $y(t) = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}} + 1$

[B135] RET 35: Il peut être pertinent de chercher des solutions particulières développées en série entière d'une EDL.

[B80] EX 36: En utilisant la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!} x^{3n}$, calculer la somme: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$

[B43] EX 37: Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)x^2}{t(1+t^2)} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

[B40] DEF 38: Un système fondamentalement de solutions est une base de $\mathcal{F}$

[B340] EX 39: Dans le cas de (y_m, u) , un système fondamentalement de solutions est $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$, $1 \leq k \leq p$, $0 \leq l \leq m_k - 1$ dans le cas complexe et $(t \mapsto t^k e^{\lambda t}, t \mapsto t^l e^{\mu t} \cos(\omega t), t \mapsto t^l e^{\mu t} \sin(\omega t))$ dans le cas réel $\lambda \in i\omega, \mu \in i\omega, \omega \in \mathbb{R}$.

[B28] DEF 40: On considère le système $y' = A(t)y$. On pose alors la dérivante $R(t, t_0) = \Phi(t) \Phi(t_0)^{-1}$, $K \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(t_0) = I_n$ on a donc $y(t) = R(t, t_0)y(t_0)$ $y \mapsto y(t) = R(t, t_0)X(t_0)y(t_0)$

[B11] RET 41: On associe $R(t, t_0)$ à la matrice inversible qui lui correspond canoniquement dans $\mathcal{M}_n(K)$.

[B28] PROP 42: $\forall t \in I, R(t, t) = I_n$. $\forall (t_1, t_2) \in I^2, R(t_2, t_1) = R(t_2, t_0)R(t_0, t_1)$

[B28] PROP 43: La solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ est donnée par $y(t) = R(t, t_0)y_0$.

[B28] DEF 44: Le nombre d'un système de solutions.

[B28] DEF 45: Soient $y_1, \dots, y_m$ solutions de $y' = A(t)y$. Alors $y_j(t) = y_j(t_0)$. Alors $y_j(t) = R(t, t_0)y_j(t_0)$, d'où: $W(t) = \det(R(t, t_0)) \det(y_1(t_0), \dots, y_m(t_0))$

[B28] PROP 46: En posant $\Delta(t) = \det(R(t, t_0))$, on a $\Delta'(t) = \text{tr}(A(t))\Delta(t)$ et donc $W(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(u)) du} \det(y_1(t_0), \dots, y_m(t_0))$

[B28] PROP 47: Par la méthode de variation des constantes, on trouve $Y(t) = R(t, t_0)Y_0 + \int_{t_0}^t R(t, u)B(u) du$

[B28] DEF 48: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $t_0 \in I$. On dit que t_0 est un zéro simple de f lorsque $f(t_0) = 0$ et $f'(t_0) \neq 0$.

[B28] PROP 49: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors t_0 est un zéro simple de f si et seulement si: $\exists g: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(t) = (t-t_0)g(t)$ avec $g(t_0) \neq 0$.

[B28] COR 50: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $t_0 \in I$ un zéro simple de f . Alors ce zéro est isolé c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de t_0 où la fonction f n'admet pas d'autres zéros. De plus, f change de signe en t_0 .

[B28] PROP 51: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $t_0 \in I$ un zéro simple de f . Alors, les zéros d'une solution non nulle de $y' = f(t)y$ de I sont simples et isolés. Cette solution n'admet qu'un nombre fini de zéros sur tout compact de I .

[B28] THM 52: (séparation de Sturm) On considère à nouveau l'équation (E) avec les mêmes notations. Soient y et z deux solutions indépendantes de (E). Soient $t_1, t_2 \in I$ et $t_1 < t_2$, deux zéros consécutifs de y . Alors, il existe un et un seul zéro de z dans $]t_1, t_2[$.

II - Etude qualitative

1) Portrait de phase en dimension 2 [BER 203 à 212]

On étudie l'allure des trajectoires des solutions du système différentiel $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

On suppose $\det(A) \neq 0$. L'allure des solutions dépend de la nature des valeurs propres de A .

CAS RÉEL: On distingue suivant la nature des valeurs propres

→ λ et μ distinctes de même signe: voir Figure 1

→ λ et μ distinctes de signe opposés: voir Figure 2

→ $\lambda = \mu$, A diagonalisable: voir Figure 3

→ $\lambda = \mu$, A non diagonalisable: voir Figure 4

CAS NON RÉEL: Figures 6, 7, 8 $\lambda < 0 \rightarrow$ Figure 5

2) Localisation des zéros

DEF 48: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $t_0 \in I$. On dit que t_0 est un zéro simple de f lorsque $f(t_0) = 0$ et $f'(t_0) \neq 0$.

PROP 49: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors t_0 est un zéro simple de f si et seulement si: $\exists g: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(t) = (t-t_0)g(t)$ avec $g(t_0) \neq 0$.

COR 50: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $t_0 \in I$ un zéro simple de f . Alors ce zéro est isolé c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de t_0 où la fonction f n'admet pas d'autres zéros. De plus, f change de signe en t_0 .

PROP 51: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $t_0 \in I$ un zéro simple de f . Alors, les zéros d'une solution non nulle de $y' = f(t)y$ de I sont simples et isolés. Cette solution n'admet qu'un nombre fini de zéros sur tout compact de I .

THM 52: (séparation de Sturm) On considère à nouveau l'équation (E) avec les mêmes notations. Soient y et z deux solutions indépendantes de (E). Soient $t_1, t_2 \in I$ et $t_1 < t_2$, deux zéros consécutifs de y . Alors, il existe un et un seul zéro de z dans $]t_1, t_2[$.

ANNEXE: Portraits de phase en dimension 2:

Sélect λ et μ les valeurs propres de A

$$\text{SPEC}(\mathbb{R}^2), A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$$

On note e_1 et e_2 les deux vecteurs colonnes de P qui forment une base de $\mathbb{R}^2$. En posant $\tilde{y} = P^{-1}y$, on a $\tilde{y}' = P^{-1}y' = P^{-1}Ay = BP^{-1}y = B\tilde{y}$ donc si $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}$, on a:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1' = \lambda \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2' = \mu \tilde{y}_2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \tilde{y}_1(t) = C_1 e^{\lambda t} \\ \tilde{y}_2(t) = C_2 e^{\mu t} \end{cases}$$

et $y(t) = P \tilde{y}(t) = C_1 e^{\lambda t} e_1 + C_2 e^{\mu t} e_2$.

On obtient les cercles suivantes:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{\lambda y_1}{\mu y_2}$$

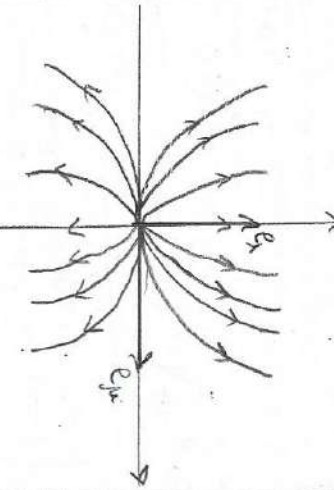


Figure 1a: Nœud impropre répulsif ($\lambda > 0, \mu < 0$)

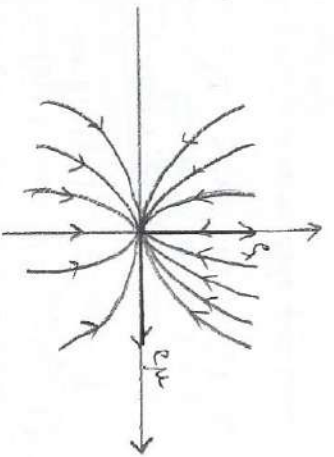


Figure 1b: Nœud impropre attractif ($0 < \lambda < \mu$)

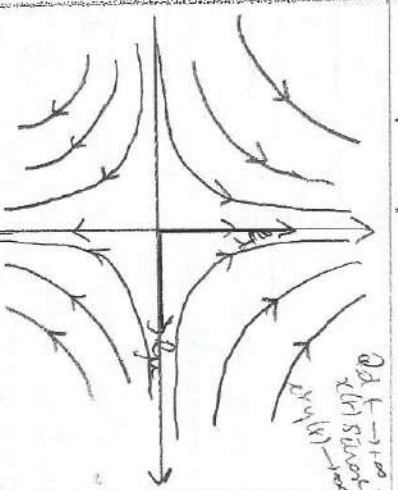


Figure 2: Point selle ($\lambda < 0, \mu < 0$)

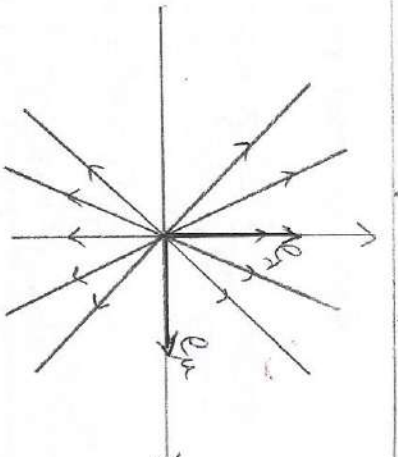


Figure 3: Nœud propre répulsif ($\lambda > 0$)

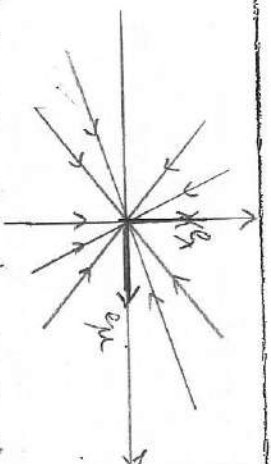


Figure 3a: Nœud propre attractif ($\lambda < 0$)

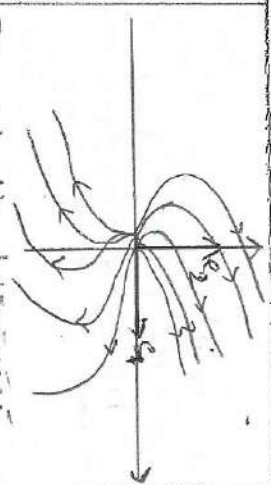


Figure 4: Nœud propre répulsif

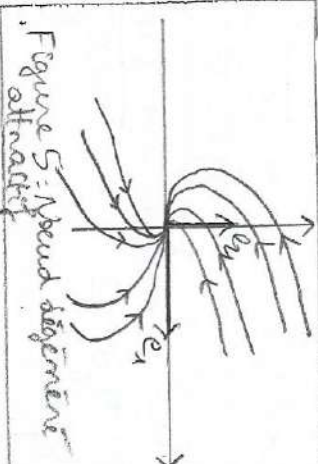


Figure 5: Nœud dégénéré attractif

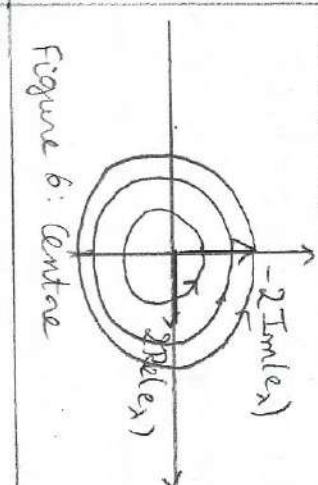


Figure 6: Centre

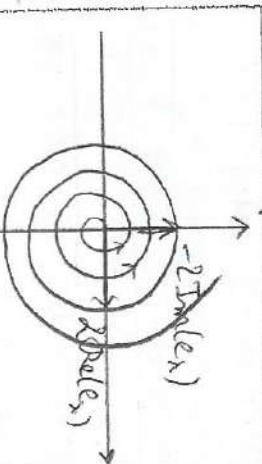


Figure 7: Spirale instable

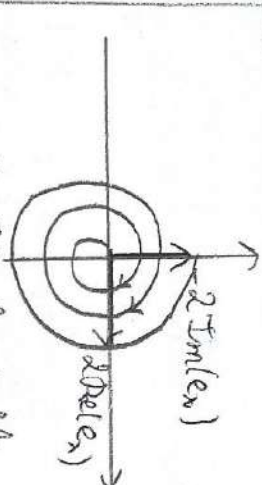


Figure 8: Spirale stable

Références:

[B] Equations différentielles, Florent Beukelin

[DEN] Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly

[FRA] Exercices de mathématiques, groupe X-ENS

Analyse 1, François, Liandra, Nicolas