

Leçon 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires

Références : Berthelot, Benzoni-Gavage, Demailly

I - Généralités sur les équations différentielles ordinaires

1) Définitions et premières propriétés

2) Théorèmes généraux : existence, unicité, durée de vie des solutions

II - Méthodes de résolution et exemples

1) Cas linéaire

a) Structure des solutions et résolution

b) Etude des portraits de phase en dimension 2

c) Solutions développables en série entière

2) Cas non linéaire

III - Etude qualitative de solutions dans les systèmes autonomes

1) Systèmes autonomes : définitions et propriétés

2) Etude du pendule

3) Etude du système proie - prédateurs

DEV 1 : Cauchy - Lipschitz

DEV 2 : fonction de Bessel

Leçon 220: Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires

$(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach (le plus souvent, $E = K^n$), $K = \mathbb{R}$

I - Généralités sur les équations différentielles ordinaires

DEF 1: On appelle équation différentielle ordinaire toute équation de la forme $F(t, u, u', \dots, u^{(m)}) = 0$ où u est une fonction inconnue de la variable réelle $t \in \mathbb{R}$ à valeurs dans E et m fois dérivable et $F: \Omega \rightarrow E$ avec Ω ouvert de $I \times E^m$.

DEF 2: En ce qu'on s'intéressera qu'à des EDO de type résolues, de la forme $u^{(m)} = f(t, u, u', \dots, u^{(m-1)})$ avec $f: \Omega \rightarrow E$ et $(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, $y \in E$. Une solution de l'équation est $u: I \rightarrow E$ m fois dérivable telle que pour tout $t \in I$, $(t, u(t), \dots, u^{(m-1)}(t)) \in \Omega$ et $y^{(m)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(m-1)}(t))$.

PROP 3: En considérant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(m-1)} \end{pmatrix}$, on peut ramener l'équation à $y' = f(t, y)$ avec $f(t, y) = \begin{pmatrix} y \\ f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \end{pmatrix}$.

DEF 4: Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Le problème de Cauchy de données initiales $y(t_0) = y_0$ consiste à trouver la(ou les) solution(s) de $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

EX 5: $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

PROP 6: Si $f: \Omega \rightarrow E$ est continue, pour $(t_0, y_0) \in \Omega$, $y: I \rightarrow E$ est solution de $y' = f(t, y)$ avec $y(t_0) = y_0$ si et seulement si y est continue, $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in \Omega$, $\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

DEF 7: Soient $y_1: I_1 \rightarrow E$, $y_2: I_2 \rightarrow E$ deux solutions de $y' = f(t, y)$. On dit que y_2 prolonge y_1 (strictement) si $I_1 \subset I_2$ et $y_2|_{I_1} = y_1$ ($I_1 \subsetneq I_2$).

DEF 8: On dit que y est une solution maximale si elle n'admet pas de prolongements stricts.

DEF 9: Dans le cas où $\Omega = I \times E$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$, Ω' ouvert de E , une solution globale est une solution définie sur I tout entier.

EX 10: Il n'y a pas unicité des prolongements max des solutions maximales. Considérer $u' = 2\sqrt{|u|}$.

PROP 11: Une solution globale est maximale.

REM 12: La réciproque est fautive en général. considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$

2) Théorèmes généraux: existence, unicité, durée de vie des solutions I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

PROP 13 (Gronwall différentiel) Soit $t \in I$, $w \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose que: $\forall t \in I$, $w'(t) \leq w(t)v(t)$. Alors: $\forall t \in I$, $w(t) \leq w(t_0)e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$.

PROP 14 (Gronwall intégral) Soient $t_0 \in I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Supposons $u, v \geq 0$ et que: $\forall t \in I$, $u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds$. Alors: $\forall t \in I$, $u(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^t v(s)ds}$.

DEF 1

THM 15 (Cauchy - Lipschitz, globalement Lipschitzien):

Soit $\Omega \subset I \times E$, $f: \Omega \rightarrow E$ continue telle que:

$\forall J \subset I$ compact, $\exists k_J > 0$, $\forall t \in J$, $\forall x, y \in E$,

$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k_J \|x - y\|$. Alors: $\forall (t_0, u_0) \in \Omega$, $\mathcal{R}(t_0, u_0)$ admet une unique solution globale.

DEF 16: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f: \Omega \rightarrow E$ est dite localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état y lorsque pour tout $(t, y) \in \Omega$, il existe $C_0 = [t-T, t+T] \times B(y, r) \subset \Omega$ avec $T, r > 0$ et $k > 0$ tels que pour tous $(t, y_1), (t, y_2) \in C_0$, $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$.

THM 17 (Cauchy - Lipschitz) Soient $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$ ouvert, $f: \Omega \rightarrow E$ continue et localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe une solution maximale $y: I \rightarrow E$ de $y' = f(t, y)$ telle que $y(t_0) = y_0$. De plus, I est ouvert.

REM 18: Ces hypothèses, que nous noterons (CL), sont vérifiées par les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

THM 19 (Arzela - Peano): Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $\dim(E) < \infty$ et $f: \Omega \rightarrow E$ continue. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors, il existe une solution $y: I \rightarrow E$ maximale de $y' = f(t, y)$ telle que $y(t_0) = y_0$. De plus, I est ouvert.

THM 20: (Sortie de tout compact) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f: \Omega \rightarrow E$ ($\dim(E) < \infty$) vérifiant (CL). Soit $y:]c, d[\rightarrow E$ une solution maximale de $y' = f(t, y)$. Alors $(t, y(t))$ sort de tout compact de Ω lorsque $t \rightarrow d$. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un voisinage V de d tel que pour tout $t \in V$, $(t, y(t)) \notin K$. Si $\Omega =]a, b[\times E$ avec Ω ouvert de E , $d < b$, alors pour tout $K \subset \Omega$ compact, il existe un voisinage V de d telle que pour tout $t \in V$, $y(t) \notin K$.

EX 21 La solution $y: t \mapsto \frac{1}{1-t}$ de $y' = y^2$ sort de tout compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lorsque $t \rightarrow 1$.

COR 21: (Explosion en temps fini) Soient $\Omega =]a, b[\times E$ et $f: \Omega \rightarrow E$ ($\dim(E) < \infty$) vérifiant (CL). Soit $y:]c, d[\rightarrow E$ une solution maximale de $y' = f(t, y)$. Si $d < b$, alors on a $\|y(t)\| \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow d$.

EX 22 $y' = \sin(y)$ admet une unique solution globale $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $y(0) = 1$.

$y' = y^4$ admet une unique solution maximale non globale $y:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $y(0) = 1$.

II - Méthodes de résolution et exemples $\dim(E) = n \in \mathbb{N}$

1) Cas linéaire

a) Structure des solutions et résolution

DEF 23: Une EDO est dite linéaire lorsque elle s'écrit $y' = A(t)y + B(t)$ avec $A: I \rightarrow M_n(K)$ et $B: I \rightarrow E$, homogène lorsque $B = 0$.

THM 24: Si $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$, $B \in \mathcal{C}(I, E)$. Alors $K(t_0, y_0) \in I \times E$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution globale.

PROP 25: L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_h$ de $(L_h): y' = A(t)y$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, E)$. Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\phi_{t_0}: \mathcal{S}_h \rightarrow E$ est un isomorphisme linéaire et $\dim(\mathcal{S}_h) = n$.

COR 26: Soient $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$, $B \in \mathcal{C}(I, E)$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(L): y' = A(t)y + B(t)$ est un K -espace affine de direction $\mathcal{S}_h$.

REM 27: "Solution générale = solution homogène + solution particulière"

REM 28: Dans le cas A constant, on peut résoudre $y' = Ay$ par $y: t \mapsto Ce^{tA}$ ($C \in \mathbb{R}$) et trouver une solution particulière de $y' = Ay + B(t)$ par la méthode de la variation de la constante.

DEF 29: Dans le cas non constant on définit la résolvante $R(t, t_0) = \phi(t) \circ \phi(t_0)^{-1}$ de sorte que $y(t) = R(t, t_0)y_0$ si y est la solution de $y' = A(t)y + b(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

PROP 30: La solution de $y' = A(t)y + b(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$ est $y(t) = R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t R(t, u)b(u)du$.

DEF 31: Un système fondamental de solutions de $y' = A(t)y$ est une base de $\mathcal{S}_h$ ($y_1, \dots, y_n$). On définit le Wronskien de ce système par $W(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$.

PROP 32: $\forall t \in I$, $W(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(u))du} \det(y_1(t_0), \dots, y_n(t_0))$ ou $y_i(t_0) = y_{0,i}$.

b) Étude des portraits de phase en dimension 2 [BFR]

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On veut étudier l'allure des trajectoires des solutions du système linéaire $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On suppose $\det(A) \neq 0$. L'allure des trajectoires dépend de la nature des valeurs propres de A notées λ et μ (éventuellement égales).

- Valeurs propres réelles, A diagonalisable (Figures 1a-1c)
- Valeurs propres réelles, A non diagonalisable (Figures 5a-5c)
- Valeurs propres non réelles (Figures 7-8-9)

c) Solutions développables en série entière (DSE)

PROP 33: On peut calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ en dérivant la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$. [BFR]

PROP 34: On pose $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$. On peut trouver le DSE de f en résolvant une équation diff. vérifiée par f .

THM 35: L'unique fonction DSE en 0, valant 1 en 0 et solution de $xy'' + y' + xy = 0$ est donnée par:

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin(\theta)) d\theta \quad \text{[FRA]}$$

⊗ DEV 2

2) Cas non linéaire [BER]

EX 36: L'équation différentielle de Bernoulli est de la forme $y' + a(t)y = b(t)y^m$, $m \neq 0, 1$, $m \in \mathbb{N}$, $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues avec une condition de Cauchy $y(t_0) = y_0$. On peut se ramener au cas linéaire par le changement de variable $z = y^{1-m}$.

EX 37: L'équation de Riccati est de la forme: $y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2$. Si on connaît une solution $\tilde{y}$ de l'équation, on peut résoudre l'équation en posant $y = \tilde{y}(t) + z$ et on se ramène à une équation de Bernoulli.

III - Étude qualitative de solutions dans les systèmes autonomes

1) Systèmes autonomes, définitions et propriétés [BERVZ]

DEF 38: Une équation différentielle autonome est une EDO de la forme $u' = f(u)$ avec $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}$ ouvert.

DEF 39: Les trajectoires des solutions maximales de (E) i.e. les courbes $f(u(t), t) \in J$ où $u \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ est une solution maximale de (E) sont appelées courbes intégrales du champ f .

DEF 40: Un champ $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est dit complet lorsque toutes les solutions maximales de (E) sont globales.

EX 41: $f(u) = u^2$ n'est pas complet.

DEF 42: On appelle intégrale première d'un champ de vecteurs f sur U une fonction $h \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ telle que $dh(u)(f(u)) = 0$ pour tout $u \in U$.

DEF 43: On appelle flot associé à (E) pour $t_0 \in I$ l'application $\phi_{t_0}: (t, v) \mapsto \phi(t, v)$ donnant la solution de (E) telle que $u(t_0) = v$. Pour tout $v \in U$, on appelle orbite de v pour (E) l'ensemble $\{\phi_t(v); t \in \mathbb{R}\}$.

PROP 44: L'orbite de v est réduite au singleton $\{v\}$ si et seulement si $f(v) = 0$. Si $f(v) \neq 0$, s'il existe $t_0 \neq t_1$ tel que $\phi_{t_0}(v) = \phi_{t_1}(v)$, alors $t \mapsto \phi_t(v)$ est une solution globale périodique et l'orbite de v est une courbe fermée simple.

PROP 45: Deux orbites de $u' = f(u)$ sont soit disjointes soit confondues. Si elles sont confondues, elles sont translatées l'une de l'autre.

2) Étude du pendule [BER]

On étudie $y' = F(y)$ avec $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (y, -\sin(x))$

PROP 46: Le champ F est complet.

PROP 47: Les positions d'équilibre sont $\{(0, k\pi) | k \in \mathbb{Z}\}$.

PROP 48: $h: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{y^2}{2} - \cos(x)$ est une intégrale première de F .

REM 49: On étudie alors les courbes de niveau de h et on en déduit le portrait de phase (Figure 10).

3) Étude du système proie-prédateur

On étudie $y' = F(y)$ avec $F: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x(1-y), y(x-1))$.

PROP 50: Les points d'équilibre de F sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

PROP 51: $h: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - \ln(x) + y - \ln(y)$ est une intégrale première.

PROP 52: Toute solution avec $y_0, x_0 > 0$ est périodique.

DEV 2

* THM 53: (Équation de Bessel) Soit (E): $xy'' + y' + xy = 0$.

1) (E) admet des solutions développables en série entière en 0 de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

2) Soit f_0 la solution DSE autour de 0 telle que $f_0(0) = 1$ et f_0' une solution de l'ED sur $]0; \infty[$. Alors (f, f_0) est libre si et seulement si f n'est pas bornée au voisinage de 0.