

Leçon 214: Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples d'application en analyse et en géométrie

Références: Lafontaine, Rouvière, Gourdon, Beck, Caldero, Avez

I - Inversion locale: définitions, théorème et conséquences

- 1) Difféomorphismes
- 2) Théorème d'inversion locale
- 3) Une application: changement de coordonnées

II - Fonctions implicites

- 1) Théorème des fonctions implicites
- 2) Différentielle de la fonction implicite

III - Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

- 1) Définitions et caractérisations
- 2) Espaces tangents
- 3) Extrema liés

DEV 1: Théorème d'inversion locale

DEV 2: Théorème des extrema liés

6': Ces théorèmes de calcul différentiel sont fondamentaux de par leur heuristique et leurs très nombreuses applications, notamment à travers la notation géométrique de sous-variétés et le calcul d'extrema.

Points à souligner:

- Difféomorphismes: exemples, contre-ex
- Thm d'inversion locale → **DESSIN ANNEXE**
- Exemples de l'esp, du chgmt de coor.
- Immersion, submersion
- Applicat° chgmt de var.
- Fonctions implicites → **DESSIN ANNEXE**
- Applicat° à la dépendance $\mathcal{C}^0$ des racines simples d'un polynôme
- On peut différentier la fct° implicite → $\vec{e}_q^0$
- Not° géométrique de sous-variété, exemple
- Espace tangent → extrema liés et applicat°

Chap 2.14: Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Soit $p, q, n \in \mathbb{N}^*$, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, V un ouvert de $\mathbb{R}^q$.

I - Inversion locale - définitions, théorème et conséquences

1) Difféomorphismes

DEF 1: Soit $f: U \rightarrow V$. On dit que f est un C^k difféomorphisme ($k \geq 1$) lorsque f est bijective de classe C^k et que sa réciproque est de classe C^k . On dit alors que U et V sont difféomorphes.

REM 2: Soit $a \in U$ et $g = f^{-1}$. Le théorème de différentiation des fonctions composées appliqué à $f \circ g$ et $g \circ f$ donne que $df(a)$ et $dg(f(a))$ sont inverses l'une de l'autre. En particulier, on a $p = q$.

EX 3: Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont difféomorphes entre eux et difféomorphes à $\mathbb{R}$.

Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne) est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

EX 4: L'exemple de $t \mapsto t^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ montre qu'un homéomorphisme lisse peut ne pas être un difféomorphisme.

PROPS: Soit $f: U \rightarrow V$ un homéomorphisme. Si f est C^k et si df est inversible en tout point, alors f est un difféomorphisme de classe C^k et $df^{-1}(f(x)) = (df(x))^{-1}$.

2) Théorème d'inversion locale

DEV 1

THM 6 (Inversion locale) Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^1 . On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $df(a)$ soit un isomorphisme de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^q$ ($df(a)^{-1}$ existe, $df(a)$ et $df(a)^{-1}$ sont continus). Alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que:

- (i) $f|_V$ est une bijection de V sur W
- (ii) L'application inverse $g: W \rightarrow V$ est continue
- (iii) g est de classe C^1 et pour tout $x \in W$, $dg(f(x)) = df(x)^{-1}$

COR 7: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in U$, $df(x)$ est inversible. Alors f est une application ouverte: pour tout ouvert $\Omega \subset U$, $f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^q$.

EX 8: Il existe deux ouverts U et V de $C^1_m(\mathbb{R})$ contenant I_m tels que: $V \subset U$, $\exists A \in U$, $B = A^c$.

DEF 9: Un difféomorphisme local est une application de classe C^k de U dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est inversible.

REM 10: Une application de classe C^k dont la différentielle en un point est inversible, est un difféomorphisme local d'un voisinage de ce point sur son image.

DEF 11: Une immersion (de classe C^k) de U dans $\mathbb{R}^q$ est une application (C^k) de U dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est injective.

DEF 12: Une submersion (C^k) de U dans $\mathbb{R}^q$ est une application (C^k) de U dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est surjective.

REM 13: Une application qui est à la fois une immersion et une submersion est un difféomorphisme local.

REM 14: Un difféomorphisme local n'est pas forcément injectif, par contre, tout difféomorphisme local bijectif est un difféomorphisme.

EX 15: $\exp:]-\pi, \pi[\rightarrow S^1$ est un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 sur un voisinage de I_m , mais ce n'est pas un difféomorphisme de $]-\pi, \pi[$ sur son image.

EX 16: En identifiant C à $\mathbb{R}^2$, $z \mapsto z^2$ est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sur lui-même.

$(\theta, 0) \in]0, \pi[\times \mathbb{R} \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est un difféomorphisme local.

THM 17 (Inversion globale) Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^q$ de classe C^1 et injective. Alors on a l'équivalence des deux points suivants:
(i) pour tout $x \in U$, $df(x)$ est inversible
(ii) $V = f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et $f^{-1}: V \rightarrow U$ est de classe C^1 .

3) Une application: changement de coordonnées

DEF 18: Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle changement de coordonnées sur V la donnée de fonctions $f_1, \dots, f_m: V \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ soit un C^1 -difféomorphisme de V sur un ouvert W de $\mathbb{R}^m$.

THM 19 (Changement de coordonnées) Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions numériques de classe C^1 au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$. Les relations $u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$ définissent un changement de coordonnées au voisinage de a si et seulement si le Jacobien $\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)(a)$ est non nul (si et seulement si $df_1(a), \dots, df_m(a)$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes).

[Raj
Ex 62]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

[Raj
Ex 63]

THM 20: (Changement de variables) Soit $F: (t, u) \mapsto (f(t, u), g(t, u))$ un changement de coordonnées de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue, identiquement nulle hors d'un compact assez petit. Alors: $\int \varphi(x, y) dx dy = \int \varphi(F(t, u)) |det(DF(t, u))| dt du$

EX 21: Si $F: (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, on a $dt du = r dr d\theta$
 $\int \varphi(x, y) dx dy = \int \varphi(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$

EX 22: On peut alors calculer: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ($a > 0$)

EX 23: Le laplacien s'exprime en coordonnées polaires:
 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

II - Fonctions implicites

1) Théorème des fonctions implicites

THM 24: (Fonctions implicites) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a, b) \in U$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice jacobienne $J_{f,y}(a, b)$ formée des dérivées partielles par rapport à y est inversible. Alors il existe un voisinage V ouvert contenant a , un voisinage ouvert W contenant b tels que $V \times W \subset U$ et une application $\varphi: V \rightarrow W$ de classe $\mathcal{C}^1$, unique, telle que:
 $(x \in V, y \in W, f(x, y) = 0) \Leftrightarrow x \in V, y = \varphi(x)$ (voir Annexe)

DEF 25: La fonction φ s'appelle la fonction implicite définie par f au voisinage du point (a, b) . En particulier, $\varphi(a) = b$.

REM 26: La signification du théorème 24 est que la "courbe" définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ peut, au moins localement, être vue comme le graphe d'une fonction.

EX 27: Pour l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on a $f_y(x, y) = 2y$ et il faut exclure les points où $y = 0$: en prenant $(0, 1)$ ou $(0, -1)$ comme points de départ, on voit que l'équation définit deux fonctions implicites φ_1 et φ_2 :

$V_1 =]-1, 1[, W_1 =]0, +\infty[, y = \varphi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$
 $V_2 =]-1, 1[, W_2 =]-\infty, 0[, y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$

REM 28: Le théorème des fonctions implicites se généralise à l'ordre $k > 1$.

EX 29: Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P . Il existe une application φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ et valeurs dans un voisinage V de x_0 dans $\mathbb{R}$ telle que: $\forall P \in U, \forall x \in V, x = \varphi(P) \Leftrightarrow P(x) = 0$.

EX 30: L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ possédant n racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Différentielle de la fonction implicite

THM 31: Sous les hypothèses du THM 24, la fonction implicite φ est différentiable et: $\forall x \in V, d\varphi(x) = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$

EX 32: En reprenant l'EX 27, on obtient $y' = \varphi'(x) = -\frac{x}{y}$.

EX 33: (Folium de Descartes). Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$. On peut appliquer le THM 24 à C . On trouve que $\varphi'(x) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$. L'étude des tangentes à C permet de dessiner C .

EX 34: Le théorème des fonctions implicites permet de donner une solution approchée de (2): $x^2 + 0,99x - 2,03 = 0$

III - Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

1) Définitions et caractérisations

DEF 35: Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ de $\mathbb{R}^n$ lorsque pour tout $x \in M$, il existe des voisinages ouverts U et V de x et 0 dans $\mathbb{R}^n$ respectivement et un difféomorphisme $f: U \rightarrow V$ tel que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. On dit alors que M est de codimension $n-p$ dans $\mathbb{R}^n$.

REM 36: En d'autres termes, f transforme M en un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p localement via un changement de coordonnées.

THM 37: Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (1) M est un sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p .
- (2) Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ telle que $U \cap M = g^{-1}(0)$.
- (3) Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ une immersion et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.
- (4) Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a^1, \dots, a^p)$ et une application

$G: V \rightarrow \mathbb{R}^m \times P$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (lisse) tels que, après permutation éventuelle des coordonnées, DM soit égal au graphe de G .

REM 38: L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv) est le théorème des fonctions implicites.

DEF 39: On appelle courbe lisse, resp. surface lisse, resp. hypersurface lisse une sous-variété de dimension 1, resp. 2, resp. $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.

REM 40: L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est appelé théorème de submersion.

EX 41: $S^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n .

• Le tore $T^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 = \dots = |z_n|^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$.

EX 42: $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. De même pour $O_n(\mathbb{C})$ et $U_n(\mathbb{C})$.

EX 43: La partie de $\mathbb{R}^3$ définie par $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (cône de révolution) n'est pas une sous-variété.

PROP 44: Le groupe $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimension $n^2 - 1$.

2) Espaces tangents

DEF 45: On dit qu'un vecteur v est tangent en un point a d'une partie A de $\mathbb{R}^p$ s'il existe une application différentiable $c:]-\varepsilon; \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que $c(]-\varepsilon; \varepsilon[) \subset A$, $c(0) = a$ et $c'(0) = v$.

PROP 46: Les vecteurs tangents en un point a d'une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ forment un espace vectoriel de dimension p .

DEF 47: L'espace tangent à une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ en un point a , noté $T_a M$ est l'ensemble des points m de $\mathbb{R}^n$ tels que le vecteur $m-a$ soit tangent à M en a .

REM 48: L'espace tangent en a est un sous-espace affine de dimension p de l'espace ambiant. Il détermine un espace vectoriel par le choix de a comme origine.

PROP 49: Soit $M \subset \mathbb{R}^n$. Si g est une submersion définie sur un voisinage U de a telle que $UM = g^{-1}(g(a))$, alors $T_a M = \ker(dg(a))$.

EX 50: $T_a O_n(\mathbb{R}) = o_n(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques).

EX 51: L'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en l'identité est l'ensemble des matrices de trace nulle.

THM 52: (Inversion locale pour les sous-variétés) Soient X et Y des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement. Soit $f \in \mathcal{C}^1(x, y)$ et $a \in X$. Si $df(a)$ est un isomorphisme de $T_a X$ sur $T_a Y$, alors il existe un voisinage V de a tel que $f|_V$ soit un difféomorphisme de V sur un ouvert W de Y contenant $f(a)$.

3) Extrema liés

DEF 2

LEMME 53: Soit $v, u_1, \dots, u_p$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $u_1, \dots, u_p$ soient linéairement indépendantes. On suppose que $\bigcap_{i=1}^p \ker(u_i) \subset \ker(v)$. Alors, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $v = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$.

THM 54: (Extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_p$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ et $M = \{x \in V \mid g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$. On suppose que $f|_M$ admet un extremum en a sur M et que les différentielles $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes. Alors, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $df(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i dg_i(a)$.

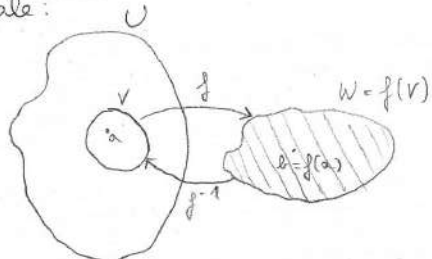
DEF 55: Les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (uniques) sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

REM 56: (Interprétation géométrique) Le théorème des extrema liés signifie que si f admet un extremum a sur une sous-variété M alors la restriction de $df(a)$ à $T_a M$ est nulle.

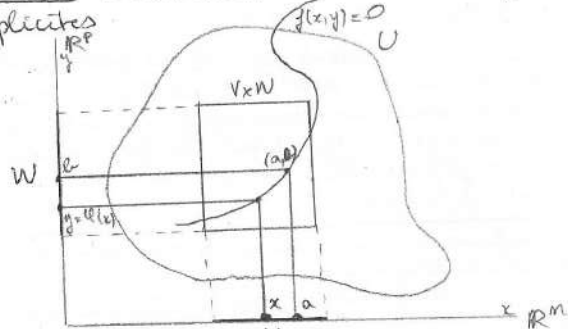
EX 57: (Inégalité de Hadamard) Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, soit $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. On a l'inégalité $|\det(v_1, \dots, v_m)| \leq \|v_1\| \dots \|v_m\|$ avec égalité si et seulement si l'un des v_i est nul ou $(v_1, \dots, v_m)$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

REM 58: Géométriquement, cette inégalité exprime que pour des côtés de longueur donnée, les parallélépipèdes de volume maximale sont rectangles.

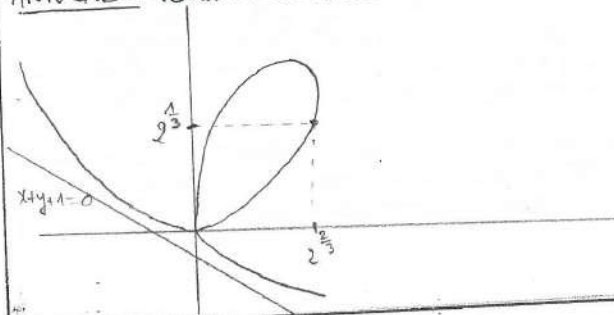
ANNEXE 1: Illustration du théorème d'inversion locale :



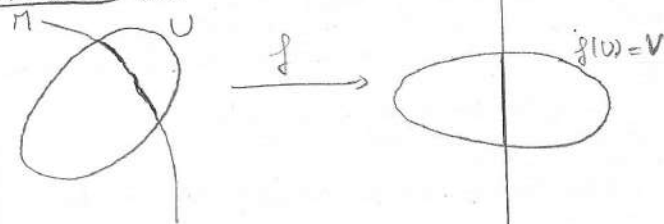
ANNEXE 2: Illustration du théorème des fonctions implicites



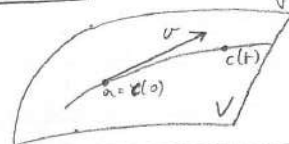
ANNEXE 3: Folium de Descartes



ANNEXE 4: Sous-variété



ANNEXE 5: Vecteurs tangents



Références :

- [LAF] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles
- [ROU] F. Rouvière, Le petit guide de calcul différentiel
- [GOU] Goudon, Analyse
- [BEC] Beck, Objectif Agrégation
- [CAL] Caldère, Nouvelles Ristines... Tome 2
- [AVEZ] Avez, calcul différentiel

- $\mathcal{Q}^0$ oral
- Caractérisat° sous-variétés
- $\mathcal{Q}^0$ de W