

Leçon 213: Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes.

Exemples et applications

Références: Daniel Li (Cours d'analyse fonctionnelle),
Hirsch (Éléments d'analyse fonctionnelle)
Gourdon, Beck (Objectif Apogée), El Amrani (Analyse de Fourier)

I - Espaces de Hilbert

- 1) Des espaces préhilbertiens aux espaces de Hilbert
- 2) Orthogonalité

II - Théorèmes de projection et conséquences

- 1) Théorèmes de projection
- 2) Conséquences

III - Bases hilbertiennes

- 1) Définition, existence, propriétés
- 2) Application aux séries de Fourier
- 3) Application aux polynômes orthogonaux

IV - Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints

DEV 1: Théorème de projection sur un convexe fermé

DEV 2: Polynômes orthogonaux.

Exercice 213: Espaces de Hilbert - Bases hilbertiennes.

Exemples et applications

I - Espaces de Hilbert

TH17: Les espaces préhilbertiens avec espace de Hilbert

DEF 1: Un produit scalaire (s.s.) sur H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ tel que :

- $\forall y \in H, x \in H \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire
- $\forall x \in H, y \in H \mapsto \langle x, y \rangle$ est antilinéaire
- $\forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\forall x \in H, \langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0_H$.

Le couple $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé espace préhilbertien.

Si H est de dimension finie, on parle d'espace euclidien.

EX 2: Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ est un produit scalaire.

PROP 3: (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit H un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ ou équivalently $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

PROP 4: Soit H préhilbertien. L'application $x \in H \mapsto (\langle x, y \rangle)_{y \in H}^2$ définit une norme sur H associée au produit scalaire.

DEF 5: Toute norme provenant d'un produit scalaire est appelée norme hilbertienne. Si H muni d'une telle norme est complet, on dit que c'est un espace de Hilbert.

COR 6: Soit H préhilbertien. $\forall y \in H$, l'application $\phi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue et sa norme sup-norme vaut $\|y\|$.

PROP 7: Identité du parallélogramme: Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un evn.

PROP 8: Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, $x, y \in H$.

EX 3: Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$.

EX 3: (1) $\mathbb{R}^d$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace de Hilbert.

(2) $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$ est un Hilbert.

(3) $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de EX 2 n'est pas complet.

(4) Tout espace euclidien est un espace de Hilbert.

2) Orthogonalité Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ préhilbertien. TH17

DEF 10: Deux éléments x et y de H sont dits orthogonaux et on note $x \perp y$ lorsque $\langle x, y \rangle = 0$.

DEF 11: Soit $A \subset H$. On définit l'orthogonal de A comme le sous-espace vectoriel $A^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\} = \bigcap_{y \in A} \ker \phi_y$.

PROP 12: Pour $A \subset H$, $A^\perp$ est un s.v.f. fermé de H .

PROP 13: Pour $A \subset H$, $A^\perp = \overline{A}^\perp$ et $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.

TH17 14 (Pythagore): Si x et y sont orthogonaux dans H , alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. ϕ est une équivalence si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

PROP 15: Pour $A \subset H$, $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$ et $(A^\perp)^\perp = \overline{\text{Vect}(A)}$.

II - Théorèmes de projection et conséquences

1) Théorèmes de projection TH17 15 DEF 1

Soit H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H . Soit $x \in H$. Il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C) = \inf \{\|x - z\| \mid z \in C\}$.

Cet élément est appelé projection de x sur C et note $P_C(x)$. On a également la caractérisation suivante :

$y = P_C(x) \iff y \in C$ et $\forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

On dit alors en [ANNEXE 2].

PROP 16: Avec les notations précédentes, l'application $P_C : H \rightarrow C$ est 1-lipshitzienne.

$\forall x_1, x_2 \in H, \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$.

REM 17: P_C vérifie également $P_C \circ P_C = P_C$.

TH17 18: (Projection sur un s.v.f. fermé) Soit H un Hilbert et F un s.v.f. fermé de H . Alors $P_F : H \rightarrow F$ est linéaire et :

$\cdot P_F = P_F \circ P_F$ (P_F est donc un projecteur)

$\cdot \text{Im}(P_F) = F$ et $\text{Ker}(P_F) = F^\perp$

$\cdot \forall x \in H, P_F(x)$ est la unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

$\cdot F$ est appelé la projection orthogonale sur F .

COR 19: Soit H un Hilbert et F un sous fermé de H . Alors $H = F \oplus F^\perp$. Si F est pas fermé, $H = \overline{F} \oplus F^\perp$.

COR 20: Soit H un Hilbert et F un sous de H . $\overline{F} = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$.

2) Conséquences [41] [L1]

THM 21 (Représentation de Riesz): L'application linéaire

$$J: H \rightarrow H^* \text{ avec } H \text{ Hilbert}$$

$$y \mapsto \phi_y: H \rightarrow K \text{ surjective. } \phi_y \text{ est donc un isomorphisme.}$$

PROP 22: Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$ linéaire continue, il existe un autre opérateur T^* appelé adjoint de T tel que: $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$.

PROP 23: T^* est linéaire continue de H dans H et on a: $(T^*)^* = T$ et $\|T\| = \|T^*\|$. De plus $(T^*)^* = S^* T^*$.

EX 24: Soit $S: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ l'opération de décalage: $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ alors

Alors $S^* = T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ est l'opérateur de décalage: $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots)$ à gauche.

• Soit $T: L^2([0,1]) \rightarrow L^2([0,1])$ T est linéaire $f \mapsto Tf: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ continue sur $L^2([0,1])$

De plus $T^*g: k \mapsto \int_k^1 g(t) dt$.

• Sur $H = \mathbb{R}^d$ muni du p-n canonique, $T^* = {}^tT$ sur $H = \mathbb{Q}^d$ muni du p-n canonique, $T^* = {}^t(T)$.

III - Bases Orthonormales

1) Définition, existence, propriétés [41] [L1]

DEF 25: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de H orthonormale. On dit que:

- (e_i) est orthogonale lorsque $\forall i, j \in I, \langle e_i, e_j \rangle = 0$
- (e_i) est orthonormale lorsque $\forall i, j \in I, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$
- (e_i) est totale dans H lorsque l'ensemble $\{\sum_{i \in I} a_i e_i \mid a_i \in \mathbb{R}, (e_i)_{i \in I} \text{ des combinaisons linéaires finies}\}$ est dense dans H .

DEF 26: Une famille orthonormale totale de H est appelée base orthonormale.

EX 27: Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ est une base orthonormale de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Dans $\ell^2_{\mathbb{R}}$, la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\ell^2_{\mathbb{R}}$. Dans $\ell^2_{\mathbb{C}}$, la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\ell^2_{\mathbb{C}}$.

PROP 28: Toute famille orthonormale de vecteurs non nuls de H est libre.

PROP 29: (Processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre de H un espace préhilbertien. Il existe une famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendrent la même sous-espace vectoriel de H . Une telle famille peut être construite par récurrence en posant:

$$e_0 = \frac{1}{\|f_0\|} f_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, e_{n+1} = \frac{1}{\|f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \langle f_{n+1}, e_k \rangle e_k\|} (f_{n+1} - \sum_{k=0}^n \langle f_{n+1}, e_k \rangle e_k)$$

où P_n est la projection orthogonale sur $\text{Vect}\{f_0, \dots, f_n\}$.

PROP 30: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale, pour $x \in H$ on a $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$. Soit $x \in H$, on a alors $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$.

COR 31: $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ et $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 < \infty$.

DEF 32: Soit H un espace de Hilbert. On dit que H est séparable lorsque il admet un sous-espace dénombrable dense.

THM 33 (admis): Soit H un Hilbert. Alors H est séparable si et seulement si H admet une base orthonormale dénombrable.

REN 34: Dans les suites des espaces de Hilbert considérés ci-dessus, on suppose séparable. Soit H un espace de Hilbert.

THM 34 (Inégalité de Bessel): Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de H . Alors, pour tout $x \in H: \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ en particulier, $(\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

THM 35 (Bessel - Parseval): Soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale de H . L'ASSE:

- (1) $\forall x, y \in H, \langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle$
- (2) $\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2$
- (3) $\forall x \in H, x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$
- (4) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans H .

COR 36: Soit H un espace de Hilbert (séparable) et soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une orthonormée dans H . Alors l'application:

$$S: H \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \quad x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une isométrie linéaire surjective.

REM 37: Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux, et en particulier à $\ell^2(\mathbb{N})$.

2) Application aux séries de Fourier (BSC) (ELI)

On note $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

DEF 38: L'espace $L^2(\mathbb{T})$ est l'espace de fonctions 2π -périodiques de carré intégrable et un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$.

DEF 39: Pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n -ième coefficient de Fourier: $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$. Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ où $e_n(t) = e^{int}$.

PRO 40: (Riemann - Lebesgue): $c_n(f) \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$

DEF 41: On définit pour $N \in \mathbb{N}$, le noyau de Dirichlet:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin((2N+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}, \quad \text{et le noyau de Fejér:}$$

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{inx} = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}$$

THM 42: On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma_N(f) = F_N * f$. Si $f \in C(\mathbb{T})$, $\sigma_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ et $\|\sigma_N f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$.

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\sigma_N(f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f$ et $\|\sigma_N f\|_1 \leq \|f\|_1$.

COR 43: Ceci montre la densité de l'espace des polynômes trigonométriques dans $L^2(\mathbb{T})$ (en particulier) On a donc que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

COR 44: $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{T})$.

REM 45: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

3) Application aux polynômes orthogonaux (BSC) (ELI)

DEF 46: Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert (borné ou non) de $\mathbb{R}$. On appelle poids sur I toute fonction $w: I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b |x|^n w(x) dx < \infty$.

On considère alors $L^2(I, w, dx) = \{f \in C^0(I, \mathbb{R}) \mid \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < \infty\}$. L'espace $L^2(I, w, dx)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t) \overline{g(t)} w(t) dt$.

De plus, tout polynôme appartient à cet espace.

PRO 47: Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire qui précède, et tels que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associés au poids w .

EX 49: Soit $w(t) = e^{-t}$, (P_n) polynômes de Laguerre. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $co(x) = e^{-x^2}$, (P_n) polynômes de Hermite.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $co(x) = 1$, (P_n) polynômes de Legendre. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $co(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (P_n) polynômes de Chebyshev.

THM 50: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et w une fonction poids. S'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\int_a^b e^{\epsilon |x|} w(x) dx < \infty$ alors les polynômes orthogonaux associés à w forment une base hilbertienne de $L^2(I, w, dx)$.

IV - Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints

DEF 51: Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit que T est auto-adjoint si $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$ pour tout $x, y \in H$.

LEM 52: Soit H un Hilbert. Soit $U, V \in \mathcal{L}(H)$. On a: $\overline{U+V} = \overline{U} + \overline{V}$ et $\overline{UV} = \overline{V} \overline{U}$.

PRO 53: Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint si et seulement si $T = T^*$.

THM 54: Soit H un Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Plus précisément, $\sigma_{\text{ess}}(T) \subset \mathbb{R}$ et $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$. Alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.