

Leçon 208 : Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples.

Références : Daniel Li (cours d'analyse fonctionnelle), Gourdon

I - Espaces vectoriels normés

- 1) Normes équivalentes
- 2) Applications linéaires continues (opérateurs)
- 3) Cas de la dimension finie

II - Espaces de Banach

- 1) Définition et propriétés
- 2) Le théorème de Banach et ses applications

III - Espaces de Hilbert

- 1) Produit scalaire, norme hilbertienne
- 2) Théorème de projection et ses conséquences

DEV 1 : Riesz - Fischer

DEV 2 : Banach - Steinhaus et série de Fourier divergente en 0.

Leçon 208: Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples.

Soit E un espace vectoriel (ev) sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Espaces vectoriels normés

1) Normes équivalentes [1]

DEF 1: Une norme sur E est une application $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les axiomes suivants:

- a) $\|x\| \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation) $\forall x \in E$
 - b) $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité)
 - c) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
- Sur $E = \mathbb{R}^n$, on définit les normes suivantes:
- $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}; \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
- $$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$$

EX 3: Sur les espaces de suites:

$$\ell_1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| < \infty\}, \quad \ell_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|$$

$$\ell_2 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}, \quad \ell_2 = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ell_p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}, \quad \ell_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\ell_\infty = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$ Norme ℓ_∞ : $\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$

PROP 4: (Hölder) Soient p, q réels tels que $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in \ell^p, g \in \ell^q$. Alors $fg \in \ell^1$:

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

PROP 5: (Minkowski) Soient $f, g \in \ell^p(X, \mathcal{F}, \mu)$. Alors

$$\left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

RET 6: Cette dernière inégalité permet de démontrer que les normes de ℓ^p sur $\mathbb{R}^3$ sont des normes. Ainsi, sur les espaces ℓ^p , $f \mapsto \|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme.

DEF 7: Sur L^p l'espace des fonctions mesurables localement bornées, l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme où $\|f\|_p = \inf \{ \int |f| d\mu; \mu \in \mathcal{M}, \mu \ll \nu, \int |f| d\mu > 0 \}$.

DEF 8: On dit que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes lorsqu'il existe deux constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que $\forall x \in E, K_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K_2 \|x\|_1$

RET 9: Cela revient à dire que $\text{Id}: (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ est un homéomorphisme (bi-linéaire).

PROP 10: Toute norme $\|\cdot\|$ sur E induit une distance $d: (x, y) \in E \times E \mapsto \|x - y\|$

PROP 11: Deux normes sont équivalentes si et seulement si leurs distances induites sont topologiquement équivalentes.

PROP 12: Une norme $\|\cdot\|$ sur E est continue. EX: Soit $\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq \|x\|_r$ si $1 \leq p \leq q \leq r \leq \infty$

THM 13: Soient E, F deux ev. Soit $f: E \rightarrow F$ linéaire. L'application f est continue si et seulement si elle est continue en 0. (i) f est continue en 0 $\Leftrightarrow$ (ii) f est bornée sur $B(0,1)$ (iii) f est uniformément continue. En note de $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F . Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$.

PROP 14: L'application $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ où $\|f\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|f(x)\|$

On appelle norme subordonnée sur $\mathcal{L}(E, F)$ et on la note $\|\cdot\|$. PROP 15: On a $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \|f\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|f(x)\|$

RET 16: On remarque que $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \|f\| \leq \|f\|_p$ où $\|f\|_p = \left(\int \|f(x)\|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$. Ceci définit une norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E, F)$.

EX 17: L'application $\mathcal{L}(L^p, L^q) \rightarrow \mathcal{L}(L^p, L^q)$ n'est pas continue.

$f_0: \mathcal{L}(L^1, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$ car pour $\|f\|_1$ on a $\|f\|_1 \leq \int |f| d\mu$ et continue.

$f \in \mathcal{L}(L^1, \mathbb{R}) \mapsto \int |f| d\mu \in \mathbb{R}$ est continue pour $\|\cdot\|_1$

3) Cas de la dimension finie

TH 18: Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

REM 19: On a déjà vu un contre-exemple en dimension infinie.

COR 20: Si E est de dimension finie, toute application linéaire $f: E \rightarrow F$ est continue.

COR 21: Tout espace normé de dimension finie est complet (pour la distance associée à la norme).

COR 22: Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E (de dimension quelconque) est fermé dans E .

COR 23: Si E est de dimension finie, les compacts de E sont les fermés bornés de E .

REM 24: En dimension infinie, ce n'est pas le cas.

TH 25 (Riesz): Soit E un espace vectoriel normé. L'asse

- (1) $\dim(E)$ est finie
- (2) $B(0,1)$ est compacte
- (3) Les compacts de E sont les fermés bornés de E .

LEME 26: Soit F un sous-fermé d'un espace normé E qui n'est pas E tout entier. Alors:

$\exists x \in F^c, \exists y \in F, \|x - y\| = 1$ tel que $\text{dist}(x, F) \geq 1$

EX 1: Espaces métriques de Banach

DEF 27: Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ complet est un espace de Banach.

PRO 28: Soit F un sous-espace de E un espace vectoriel normé.

• Si F est complet et F est fermé, alors F est complet.

• Si F est complet et F est ouvert, alors F est fermé.

EX 29: Les espaces de suites $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$, $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$, $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ sont complets.

TH 30 (Heine-Borel): Soit (X, F, μ) un espace mesuré. Alors $L^p(X, F, \mu)$ est complet.

PRO 31: Si F est de Banach, alors $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ est de Banach. Si F est une algèbre de Banach.

REM 32: Le dual $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ d'un evn est donc toujours complet.

TH 33: Soit E un espace vectoriel normé. Alors E est de Banach si et seulement si toute série absolument convergente converge dans E .

EX 34: Soit E un espace de Banach et $x \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x^n\| < \infty$. Alors $I_d - x$ est inversible et son inverse est $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \in \mathcal{L}(E)$.

COR 34: Le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes bornés $\mathcal{B}(E)$ est un espace de Banach, et un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

TH 35 (Bourbaki): Soit E un espace de Banach. Toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

REM 36: De manière équivalente, dans un espace de Banach, l'intersection dénombrable d'ouverts dénombrables est dense.

TH 37: Soit E et F deux espaces de Banach et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des applications linéaires continues de E dans F . On suppose $\forall x \in E, \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n x\| < \infty$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ est continue.

EX 38: Il existe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et T_n périodique dont la série de Fourier diverge en 0.

COR 39: Soit E et F des espaces de Banach et $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite d'applications linéaires continues telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = T x$ existe pour tout $x \in E$. Alors:

- $\sup_{n \geq 1} \|T_n\| < \infty$
- $T: E \rightarrow F$ est linéaire continue
- $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$

TH 40 (Application ouverte): Soient E et F deux espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$ une application linéaire continue et surjective. Alors: $\exists C > 0, \forall (0, c) \subset T(B(0,1))$.

COR 41: Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ qui le rendent complet. Si elles sont compatibles, alors elles sont équivalentes.

TH 42 (Graphe fermé): Soient E et F deux espaces de Banach et $T: E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si son graphe $G_T = \{(x, Tx), x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.

III - Espaces de Hilbert [17]

1) Produit scalaire, norme, bilinéarité

DEF 43: Soit H un K -espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un produit scalaire est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2 \rightarrow K$ telle que:

- a) $\forall y \in H, x \in H \mapsto \langle xy \rangle$ est linéaire
- b) $\forall x \in H, y \in H \mapsto \langle xy \rangle$ est antilinéaire
- c) $\forall x, y \in H, \langle xy \rangle = \overline{\langle yx \rangle}$
- d) $\forall x \in H, \langle xx \rangle \geq 0$ et $\langle xx \rangle = 0 \iff x = 0_H$.

PRO 44: (Cauchy-Schwarz) Soit H préhilbertien. Pour tous $x, y \in H, |\langle xy \rangle| \leq \langle xx \rangle^{1/2} \langle yy \rangle^{1/2}$.

PRO 45: Soit H préhilbertien. L'application $x \in H \mapsto \langle xx \rangle^{1/2}$ définit une norme sur H associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Cette norme est dite hilbertienne.

PRO 46: (Identité du parallélogramme) Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel normé. Alors:

$\| \cdot \|$ est hilbertienne $\iff \forall x, y \in H, \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2)$

DEF 47: Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien est complet, on dit que c'est un espace de Hilbert.

EX 48: $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$ munis du produit scalaire canonique sont des espaces de Hilbert.

$\ell^2(\mathbb{N})$ muni de $(x, y) \in \ell^2(\mathbb{C}) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ est un Hilbert.

$\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni des $p \geq 1, \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ n'est pas complet.

2) Théorèmes de projection et convergences

THM 49: (Projection sur un convexe fermé)

Soit H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide H . Soit $x \in H$. Il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C) = \inf \{ \|x - z\| \mid z \in C \}$. Cet élément est appelé projection de x sur C (noté $P_C(x)$). On a également la caractérisation suivante: $y = P_C(x) \iff y \in C$ et $\forall z \in C, \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

THM 50: (Projection sur un rev fermé) Soit H un Hilbert et F un rev fermé de E . Alors P_F est linéaire et: $\bullet \text{ Im}(P_F) = F, \text{ Ker}(P_F) = F^\perp$

$\bullet y = P_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - y \in F^\perp$.

COR 51: Soit H un Hilbert et F un rev de H . Alors $H = F \oplus F^\perp$.

THM 52: (Représentation de Riesz) L'application: $J: H \rightarrow H^*$ avec H Hilbert est une isométrie linéaire $y \mapsto \phi_y: H \rightarrow K$ définie par $x \mapsto \langle xy \rangle$.